Problema 3. Arătaţi că fracţia $\dfrac{5n+12}{(2n+5)(3n+7)}$ este ireductibilă pentru orice n, număr natural.

Florin Antohe, Galaţi

Soluţie. În primul rând observăm că $2n+5$ şi $3n+7$ sunt prime între ele. Dacă d este cel mai mare divizor comun pentru $2n+5$ şi $3n+7$, atunci $d \mid 2n+5$ şi $d \mid 3n+7$, de unde $d \mid 3(2n+5)-2(3n+7)$, adică $d \mid 1$. Aşadar $d=1$, adică $2n+5$ şi $3n+7$ sunt prime între ele. Acum, prin acelaşi procedeu arătăm că $5n+12$ şi $2n+5$ sunt prime între ele, la fel $5n+12$ şi $3n+7$ sunt prime între ele. Dacă a este cel mai mare divizor comun pentru $5n+12$ şi $2n+5$, atunci $a \mid 5n+12$ şi $a \mid 2n+5$, de unde $a \mid 5(2n+5)-2(5n+12)$, adică $a \mid 1$, prin urmare $a=1$. Analog, dacă b este cel mai mare divizor pentru $5n+12$ şi $3n+7$, atunci $b \mid 5n+12$ şi $b \mid 3n+7$, de unde $b \mid 3(5n+12)-5(3n+7)$, adică $b \mid 1$, prin urmare $b=1$. Din cele de mai sus deducem că fracţia dată este ireductibilă.