

### Clasa a X-a - Etapa 3 - Problema 3

**Enunț:** Să se rezolve în  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  sistemul: 
$$\begin{cases} |z_1 + z_2| = |z_1 + z_3| = |z_2 + z_3| = \frac{2}{3}. \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \end{cases}$$

**Soluție:** Prima ecuație se rescrie  $\left| \frac{z_1 + z_2}{2} \right| = \left| \frac{z_1 + z_3}{2} \right| = \left| \frac{z_2 + z_3}{2} \right| = \frac{1}{3}$ . Fie  $a = \frac{z_1 + z_2}{2}$ ,  $b = \frac{z_1 + z_3}{2}$  și  $c = \frac{z_2 + z_3}{2}$ . Atunci sistemul devine  $|a| = |b| = |c| = \frac{1}{3}$  și  $a + b + c = 1$ . Dacă considerăm punctele  $A(a), B(b), C(c)$  și  $g$  afixul centrului de greutate al  $\triangle ABC$ , deducem că  $g = \frac{1}{3}$  și ajungem la concluzia că  $OA = OB = OC = OG$  ceea ce nu este posibil decât dacă  $A = B = C = G$  adică  $a = b = c$  ceea ce conduce la  $z_1 = z_2 = z_3 = \frac{1}{3}$ .