<u>Soluție problema 1.</u> Pentru $x<1$ avem $kx<k \Rightarrow [kx]<k,\ \forall\ k\in\mathbb{N}^*$.

Atunci $[x]+[2x]+...+[nx]<1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Pentru $x\geq 2$ avem $kx\geq 2k \Rightarrow [kx]\geq 2k,\ \forall\ k\in\mathbb{N}^*$.

Atunci $[x]+[2x]+...+[nx]\geq 2+4+...+2n=n(n+1)>\frac{n(n+1)}{2}$

Fie $x\in[1,2)$. Împărţim intervalul $[1,2)$ în n subintervale de lungime egală

$\left[1,1+\frac{1}{n}\right),\left[1+\frac{1}{n},1+\frac{2}{n}\right),...,\left[1+\frac{n-1}{n},2\right)$.

Pentru $x\in\left[1,1+\frac{1}{n}\right)$ avem $k\leq kx<k+\frac{k}{n}<k+1\Rightarrow[kx]=k$ şi ecuaţia devine $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ (A).

Pentru $x\in\left[1+\frac{1}{n},1+\frac{2}{n}\right)$ avem $k+\frac{k}{n}\leq kx<k+\frac{2k}{n}$ şi atunci $[kx]=k,\ \forall\ k\in\{1,2,...,n-1\}$ şi $[nx]=n+1$.

Ecuaţia devine $1+2+...+(n-1)+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}$ (F).

Similar se tratează şi celelalte cazuri şi nu se mai obțin soluții.

În concluzie, mulţimea soluţiilor ecuaţiei date este intervalul $\left[1,\ 1+\frac{1}{n}\right)$.