SOLUȚIE

Problema 3

Fie A o mulțime finită de numere reale cu cel puțin două elemente și funcția $f : A \to A$ cu proprietatea că pentru orice $x, y \in A,\ x \neq y$, rezultă $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

a) Arătați că f nu este funcție surjectivă.

b) Demonstrați că există $c \in A$ astfel încât $f(c) = c$.

***

Soluție:

a) Fie $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, unde $a_1 < a_2 < ... < a_n$, Presupunem prin reducere la absurd ca funcția *f* este surjecție. Rezultă că există $a_i, a_j \in A,\ a_i \neq a_j$ astfel încât $a_1 = f(a_i),\ a_n = f(a_j)$. Se obține $a_n - a_1 = |f(a_i) - f(a_j)| < |a_i - a_j| \leq a_n - a_1$, contradicție. Deci f nu este surjecție.

b) Presupunem acum că $f(x) \neq x, \forall x \in A$ și notăm

$$A_1 = \{x \in A,\ f(x) > x\},\quad A_2 = \{x \in A,\ f(x) < x\}.$$

Evident A_1, A_2 sunt mulțimi nevide, finite, disjuncte și $A_1 \cup A_2 = A$. Fie $a = \max A_1,\ b = \min A_2$. Dacă presupunem că $a > b$ avem $f(a) > a, f(b) < b$, de unde rezultă $f(a) - f(b) > a - b > 0$, absurd. Astfel avem $a < b$. Apoi $f(a) > a = \max A_1 \Rightarrow f(a) \in A_2 \Rightarrow f(a) \geq b.$

Analog $f(b) < b$, de unde rezultă $f(b) \leq a$. Deducem că $f(a) - f(b) \geq b - a > 0$, fals, deci există $c \in A$ astfel încât $f(c) = c$.