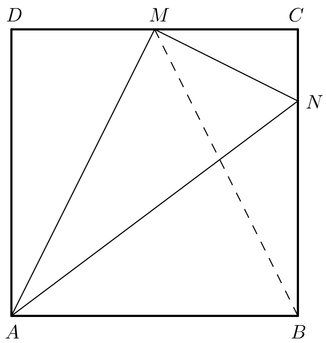
Fie un pătrat $ABCD$ şi punctele $M \in (CD)$, $N \in (BC)$ astfel încât $DM = MC$ şi $BN = 3NC$. Arătaţi că cercul circumscris triunghiului AMN este tangent dreptei CD.

din cartea *Probleme calitative de geometrie plană*, de Maria Elena Panaitopol şi Laurenţiu Panaitopol[1]

Soluţie:
Deoarece $\dfrac{NC}{MD} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{CM}{AD}$ şi $m(\angle NCM) = m(\angle MDA) = 90°$, triunghiurile NCM şi MDA sunt asemenea. Atunci $m(\angle AMN) = 180° - m(\angle NMC) - m(\angle AMD) = 180° - m(\angle NMC) - m(\angle MNC) = m(\angle NCM) = 90°$, deci patrulaterul $ABNM$ este inscriptibil. Cum triunghiurile BCM şi ADM sunt congruente (C.C.), rezultă că $\angle CMN \equiv \angle DAM \equiv \angle CBM \equiv \angle NAM = \dfrac{1}{2} m(\widehat{MN})$, de unde CD este tangentă la cerc.

Altă finalizare: Centrul cercului circumscris triunghiului AMN este mijlocul P al lui $[AN]$, deci se află pe linia mijlocie a trapezului dreptunghic $ADCN$, deci $PM \perp CD$. Aşadar CD este perpendiculara pe raza PM în punctul M de pe cerc, deci este tangetă la cerc.



Observaţie: Faptul că $m(\angle AMN) = 90°$ se putea stabili şi cu reciproca teoremei lui Pitagora aplicată în triunghiul AMN după ce în prealabil s-au exprimat lungimile segmentelor AM, AN, MN (ipotenuze în triunghiuri dreptunghice) în funcţie de lungimea laturii pătratului.

Observaţie: Din soluţia de mai sus rezultă că $(AM$ este bisectoarea unghiului $\angle DAN$. Acest lucru putea fi demonstrat şi altfel: considerând $\{P\} = AN \cap CD$, se calculează succesiv $CP = \dfrac{1}{3}AD$, $AP = \dfrac{5}{3}AD$ (din teorema lui Pitagora), apoi se aplică reciproca teoremei lui Pitagora, sau, altfel, folosind o problemă clasică[2] afirmând că $(AM$ e bisectoarea $\angle DAN$ dacă şi numai dacă $AN = BN + DM$, relaţie care se verifică imediat pentru configuraţia din problemă.

[1] Editura Gil, 1996

[2] Pentru demonstraţie, consideraţi R pe semidreapta opusă lui $(DC$ astfel ca $\Delta ABN \equiv \Delta ADR$. Atunci $AN = BN + DM \Leftrightarrow RM = AR \Leftrightarrow \angle RAM \equiv \angle RMA \equiv \angle BAM \Leftrightarrow \angle NAM \equiv \angle MAD$ (ca diferenţă de unghiuri congruente) $\Leftrightarrow$ $(AM$ este bisectoarea $\angle DAN$.