ViitoriOlimpici.ro

Problema 3
Etapa 6

Clasa a IX – a

Problema 3. Pentru orice mulţime finită M cu m elemente notăm cu p numărul perechilor (A,B) de mulţimi cu proprietatea că $A\subseteq B\subseteq M$.

Determinaţi cel mai mic număr natural m pentru care $p>2023$.

Valentin Vornicu

Soluţie:

○ Dacă (A,B) este o pereche cu proprietatea din enunţ, atunci fiecare element $x\in M$ va fi colorat cu roşu, galben sau albastru, după cum $x\in A$ sau $x\in B\setminus A$ sau $x\in M\setminus B$; astfel, fiecărei perechi (A,B) îi asociem o colorare (bine definită) cu trei culori a mulţimii M.

Numărul acestor colorări este egal cu $p=\underbrace{3\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3}_{m\ factori}=3^m$ şi astfel, din $3^m>2023$ obţinem numărul căutat $m=7$.