Problema 1. Determinaţi perechile de numere întregi (x, y) care verifică relaţia

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2.$$

Soluţie:
Scriem ecuaţia sub forma $(x^3 + 1)(x^2 + x + 1) = y^2$ şi observăm că numerele $x^3 + 1$ şi $x^2 + x + 1$ sunt relativ prime. Într-adevăr, dacă d divide şi $x^3 + 1$ şi $x^2 + x + 1$, atunci d divide şi $(x^3 + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) = 2$, deci $d = 1$ sau $d = 2$. Însă, cum $x^2 + x + 1$ este număr impar (deoarece x şi x^2 au aceeaşi paritate), 2 nu divide $x^2 + x + 1$, deci $d = 1$. Produsul a două numere prime între ele este pătrat perfect numai atunci când fiecare din ele este pătrat perfect, deci, în particular, $x^2 + x + 1$ trebuie să fie pătrat perfect. Acest lucru se întâmplă dacă $x = -1$ sau $x = 0$. În rest, dacă $x < -1$, atunci $(x - 1)^2 < x^2 + x + 1 < x^2$, iar dacă $x > 0$ atunci $x^2 < x^2 + x + 1 < (x + 1)^2$, deci, fiind cuprins între două pătrate perfecte consecutive, numărul $x^2 + x + 1$ nu este pătrat perfect.
(Alternativ, se poate observa că dacă $x < -1$ atunci $x^3 - 1 < 0$, deci nu poate fi pătrat perfect.)
Pentru $x = -1$ se obţine $y = 0$, iar pentru $x = 0$ rezultă $y = -1$ sau $y = 1$.
În concluzie, perechile căutate sunt $(-1, 0)$, $(0, -1)$ şi $(0, 1)$.