Problema 3

Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$ definim mulţimea

$$A_n = \{(i, j) \mid i = 1, 2;\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Să se determine numărul funcţiilor $f : A_n \to \{0, 1\}$ cu proprietatea că $\{f(1, j), f(2, j), f(1, j + 1), f(2, j + 1)\} = \{0, 1\}, \forall\ j = \overline{1, n - 1}$.

Vasile Pop

Soluţie. Notăm cu a_n numărul căutat ($n \geq 2$).

Considerăm $A_1 = \{(1, 1), (2, 1)\}$. Numărul funcţiilor $h : A_1 \to \{0, 1\}$ este $2^2 = 4$. Definim $a_1 = 4$.

Vom determina şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ printr-o relaţie de recurenţă.

Orice funcţie $f : A_{n+1} \to \{0, 1\}$ cu proprietatea cerută se obţine prelungind o funcţie $g : A_n \to \{0, 1\}$ cu valorile în $(1, n+1)$ şi în $(2, n+1)$.

Notăm cu x_n numărul funcţiilor "bune" definite pe A_n pentru care $f(1, n) \neq f(2, n)$ şi cu y_n numărul funcţiilor "bune" cu proprietatea $f(1, n) = f(2, n)$ şi evident $a_n = x_n + y_n$. Avem relaţiile de recurenţă:

$$(R) : \begin{cases} x_{n+1} = 2a_n = 2(x_n + y_n) \\ y_{n+1} = 2x_n + y_n \end{cases}, \ \forall\ n \geq 1.$$

• Orice funcţie "bună" definită pe A_n se poate prelungi în două moduri la o funcţie pe A_{n+1} pentru care $f(1, n + 1) \neq f(2, n + 1)$.

• O funcţie definită pe A_{n+1} pentru care $f(1, n + 1) = f(2, n + 1)$ se poate obţine alegând arbitrar $f(1, n + 1) = 0$ sau $f(1, n + 1) = 1$ dacă $g(1, n) \neq g(2, n)$ (în două moduri) şi într-un singur mod dacă $g(1, n) = g(2, n)$, luând $f(1, n + 1) \neq g(1, n)$.

Din relaţiile (R) obţinem:

$$y_{n+1} = 2x_n + y_n \Leftrightarrow a_{n+1} - x_{n+1} = 2x_n + a_n - x_n$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - x_{n+1} = x_n + a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - 2a_n = 2a_{n-1} + a_n$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = 3a_n + 2a_{n-1} \quad (*)$$

Ecuaţia caracteristică a recurenţei $(*)$ este $r^2+3r-2=0$ cu rădăcinile

$$r_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2},\ r_2=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

şi atunci $\quad a_n=A\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n+B\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n.$

Folosind condiţiile iniţiale $a_1=2^2=4$ şi $a_2=2^4-2=14$, obţinem

$$a_n=\frac{1}{2\sqrt{17}}\left[\left(5+\sqrt{17}\right)\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n-\left(5-\sqrt{17}\right)\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n\right].$$