Problema 2. Fie a, b şi c numere reale astfel încât $|a-b| \geq |c|$, $|b-c| \geq |a|$ şi $|c-a| \geq |b|$. Demonstraţi că unul dintre numerele a, b şi c este egal cu suma celorlalte două numere.

test Franţa pentru juniori, 2015

Soluţia 1:
Relaţiile date sunt simetrice în variabilele a, b, c. În plus, relaţiile nu se modifică dacă schimbăm simultan semnele tuturor variabilelor. Putem astfel să restrângem studiul la cazurile:
I. toate variabilele nenegative şi
II. două variabile sunt nenegative iar cea de-a treia negativă.
Din simetrie, putem presupune $a \geq b \geq c$, astfel că vom avea de studiat cazurile:
I. $a \geq b \geq c \geq 0$ şi **II.** $a \geq b \geq 0 \geq c$.
Vom demonstra că în ambele cazuri avem $b = a + c$.
• Dacă $a \geq b \geq c \geq 0$, relaţia a doua devine $b - c \geq a$, dar cum $b \geq b - c \geq a \geq b$, deducem că trebuie să avem egalitate în toate aceste inegalităţi, deci $b - c = a$, de unde $b = a + c$. (Rezultă şi că $b = b - c$, adică $c = 0$, şi că $a = b$.)
• Dacă $a \geq b \geq 0 \geq c$, atunci primele două relaţii devin $a - b \geq -c$ şi $b - c \geq a$, adică $b \leq a + c$, respectiv $b \geq a + c$, de unde $b = a + c$.

Soluţia 2: (cu ,,calcul prescurtat"; urmează să faceţi)
Relaţiile din enunţ se scriu echivalent, prin ridicare la pătrat, $(a-b)^2 - c^2 \geq 0$, $(b-c)^2 - a^2 \geq 0$, $(c-a)^2 - b^2 \geq 0$, adică
$(a-b+c)(a-b-c) \geq 0$, $(b-c+a)(b-c-a) \geq 0$, $(c-a+b)(c-a-b) \geq 0$.
Înmulţind aceste inegalităţi, obţinem $-[(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)]^2 \geq 0$.
Cum pe de altă parte, orice pătrat este un număr nenegativ, rezultă că
$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = 0$, ceea ce arată că unul dintre numere trebuie să fie suma celorlalte două.