

Pe o tablă sunt scrise perechile de numere  $(1, 36)$ ,  $(2, 35)$ ,  $\dots$ ,  $(12, 25)$ . Este posibil să alegem câte un număr din fiecare pereche astfel încât suma numerelor alese să fie egală cu suma numerelor care nu au fost alese? Dar dacă de pe tablă se șterg ultimele două perechi?

*J. Pataki, Concursul KöMaL, 2009*

**Soluție.**

Putem alege numerele: 1, 35, 34, 4, 5, 31, 30, 8, 9, 27, 26, 12. Suma lor este 222, la fel ca și cea a numerelor nealese.

Dacă se șterg de pe tablă ultimele două perechi, suma numerelor rămase pe tablă este  $10 \cdot 37 = 370$ , deci ar trebuie alese numere care să aibă suma 185.

Dacă din cel puțin șase perechi se alege numărul mai mare, suma numerelor alese va fi cel puțin  $1 + 2 + 3 + 4 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32 = 187$ .

Dacă alegem numărul mai mare din cel mult patru perechi, suma numerelor rămase va fi cel puțin  $1 + 2 + 3 + 4 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32 = 187$ .

Dacă alegem numărul mai mare din exact cinci dintre perechi, numerele alese vor fi  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 37 - x_6, 37 - x_7, 37 - x_8, 37 - x_9, 37 - x_{10}$ , unde  $\{x_1, x_2, \dots, x_{10}\} = \{1, 2, \dots, 10\}$ . Suma numerelor alese va avea aceeași paritate cu  $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} + 5 \cdot 37 = 1 + 2 + \dots + 10 + 185 = 240$ , adică va fi pară, prin urmare nu poate fi 185.

Așadar răspunsul la cea de-a doua întrebare este negativ.