Lecție pentru clasa a VI-a, Alexandra Picu, clasa a V-a

Sume și produse de fracții
Demonstrarea unor inegalități

M-am gândit la această temă deoarece am întâlnit în pregătirea mea pentru cursuri și olimpiadă, o serie de exerciții atractive, care presupun tehnici de lucru diferite sau „artificii de calcul" inedite.

Am împărțit prezentarea în două părți: în prima parte, în exercițiile propuse, apar sume sau produse de fracții care se pot calcula, urmând ca inegalitatea dorită să fie demonstrată relativ ușor, iar în cea de-a doua parte vor fi exerciții în care sumele sau produsele de fracții nu pot fi calculate, iar demonstrarea inegalităților necesită raționamente deosebite.

Știm cu toții algoritmul de calcul al sumelor:

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$ sau în cazul general

$$S=\frac{K}{a(a+K)}+\frac{K}{(a+K)(a+2K)}+\dots+\frac{K}{(a+(n-1)K)(a+nK)}$$

folosind formele de descompunere a fiecărui termen într-o diferență de 2 fracții:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$ și $$\frac{K}{(a+(n-1)K)(a+nK)}=\frac{1}{a+(n-1)K}-\frac{1}{a+nK}$$

<u>Ex 1</u> Să se demonstreze că $\frac{5}{2\cdot 7}+\frac{5}{7\cdot 12}+\dots+\frac{5}{(5n-3)(5n+2)}<\frac{1}{2}$

Putem scrie $\frac{5}{2\cdot 7}=\frac{7-2}{2\cdot 7}=\frac{7}{2\cdot 7}-\frac{2}{2\cdot 7}=\frac{1}{2}-\frac{1}{7}$

$\frac{5}{7\cdot 12}=\frac{1}{7}-\frac{1}{12}\dots\ \frac{5}{(5n-3)(5n+2)}=\frac{1}{5n-3}-\frac{1}{5n+2}$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{5n-3} - \frac{1}{5n+2}$$

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{5n+2} < \frac{1}{2}$$

Ex. 2 Să se dem. că $\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} < \frac{1}{6}$

Pentru calculul sumei vom face un artificiu de calcul (înmulțim fiecare termen cu 3 și apoi împărțim toată suma la 3)

$$\Rightarrow S = \left(\frac{3}{2\cdot 5} + \frac{3}{5\cdot 8} + \frac{3}{8\cdot 11} + \dots + \frac{3}{(3n-1)(3n+2)}\right) : 3$$

$$S = \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{8}} + \cancel{\frac{1}{8}} - \cancel{\frac{1}{11}} + \dots + \cancel{\frac{1}{3n-1}} - \frac{1}{3n+2}\right) : 3$$

$$S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) \cdot \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow S = \frac{1}{6}$$

Ex 3 Să se dem. că $\frac{1}{3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{3}{3\cdot 5\cdot 7} + \dots + \frac{50}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \dots \cdot 101} < \frac{1}{2}$

Încercăm să calculăm suma dată, observăm că fiecare numitor este un produs de n factori impari consecutivi $) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$
$n \geq 1$

$$\frac{n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \dots \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n+1)-1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \dots \cdot (2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{2n+1}}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \dots \cdot (2n-1)\cancel{(2n+1)}} - \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \dots \cdot (2n+1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \dots \cdot (2n-1)} - \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \dots \cdot (2n+1)}\right)$$

$\Rightarrow$ pt. $n \geq 2$ obținem

$$\frac{2}{3\cdot 5} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 5}\right)$$

$$\frac{3}{3\cdot 5\cdot 7} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}\right)$$

$\vdots$

$$\frac{50}{3\cdot 5 \cdot \dots \cdot 101} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot 5\cdot \dots \cdot 99} - \frac{1}{3\cdot 5\cdot \dots \cdot 101}\right)$$

Atunci $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{3\cdot5}} + \cancel{\frac{1}{3\cdot5}} - \cancel{\frac{1}{3\cdot5\cdot7}} + \dots + \cancel{\frac{1}{3\cdot\dots\cdot99}} + \frac{1}{3\cdot\dots\cdot101}\right)$

$\Rightarrow S = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot5\cdot\dots\cdot101}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot\dots\cdot101}$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot3\cdot\dots\cdot101} < \frac{1}{2}$

<u>Ex4</u>: Să se dem. că $\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2n-1}} - \frac{1}{3^{2n}} < \frac{1}{4}$

Putem grupa termenii sumei 2 câte 2:

$\Rightarrow \left(\frac{^{3)}1}{3} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{^{3)}1}{3^3} - \frac{1}{3^4}\right) + \dots + \left(\frac{^{3)}1}{3^{2n-1}} - \frac{1}{3^{2n}}\right) =$

$= \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \dots + \frac{2}{3^{2n}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9^2} + \dots + \frac{2}{9^n} =$

$= 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \dots + \frac{1}{9^n}\right) = 2\cdot\frac{9^{n-1} + 9^{n-2} + \dots + 9 + 1}{9^n} =$

$= \frac{2}{9^n}\cdot\frac{9^n - 1}{9-1} = \frac{\cancel{2}^{1}}{9^n}\cdot\frac{9^n-1}{\cancel{8}_4} = \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\frac{9^n-1}{9^n}}_{<1} < \frac{1}{4}$

(fr. subunitară)

<u>Ex5</u>: Să se dem. că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, avem.

$$P_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\dots\cdot\frac{n^2-1}{n^2} > \frac{1}{4}$$

Deoarece $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ putem scrie

$P = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\dots\cdot\frac{n^2-1}{n^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdot\dots\cdot\frac{(4-1)(4+1)}{n^2}$

$\Rightarrow P = \frac{1}{2}\left(\frac{2-1}{2}\cdot\frac{3-1}{3}\cdot\dots\cdot\frac{n-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{2+1}{2}\cdot\frac{3+1}{3}\cdot\dots\cdot\frac{n+1}{n}\right)$

$P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\dots\cdot\frac{\cancel{n-1}}{n}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\dots\cdot\frac{n+1}{\cancel{n}}\right)$

$\Rightarrow P = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2} = \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\frac{n+1}{n}}_{>1} > \frac{1}{4}$

(supraunitară)

! <u>Ex6</u>: Să se dem. că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem

$$\frac{1}{1\cdot3\cdot5} + \frac{1}{3\cdot5\cdot7} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} < 0{,}084$$

Vom scrie $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(2n+5)-(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} =$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\cancel{2n+5}\ 1}{(2n+1)(2n+3)\cancel{(2n+5)}_{1}} - \frac{\cancel{2n+1}}{\cancel{(2n+1)}_{1}(2n+3)(2n+5)}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right)$$

$\Rightarrow$ pt. $n=0 \Rightarrow \frac{1}{1\cdot3\cdot5} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot3} - \frac{1}{3\cdot5}\right)$

$n=1 \Rightarrow \frac{1}{3\cdot5\cdot7} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3\cdot5} - \frac{1}{5\cdot7}\right)$

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot3} - \cancel{\frac{1}{3\cdot5}} + \cancel{\frac{1}{3\cdot5}} - \cancel{\frac{1}{5\cdot7}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right)$$

$$S = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot3} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right) = \frac{1}{12} - \frac{1}{4(2n+3)(2n+5)} < \frac{1}{12}$$

$1{,}00 : 12 = 0{,}08(3)$

$0{,}08(3) < 0{,}084.$

Ex. 7: Să se dem. că $\frac{1}{3} < \underbrace{\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \ldots + \frac{1}{30}} < \frac{1}{2}$

Observăm că suma are 10 termeni, scriși în ordine descrescătoare. Cel mai mare fiind $\frac{1}{21}$, iar cel mai mic este $\frac{1}{30}$. Vom dem. dubla inegalitate fără să calculăm această sumă. Scriem urm. ineg. pt. fiecare termen din sumă.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{30} < \frac{1}{21} \leq \frac{1}{21} \\ \frac{1}{30} < \frac{1}{22} < \frac{1}{21} \\ \vdots \\ \frac{1}{30} \leq \frac{1}{30} < \frac{1}{21} \end{array}\right\} \text{10 ineg.}$$

(adunăm membru cu membru)

$\Rightarrow \frac{10}{30} < S < \frac{10}{21} \Rightarrow \frac{1}{3} < S < \frac{10}{21} < \frac{1}{2}$ $(20 < 21)$