Problema 4. Se consideră numerele naturale $\overline{ab}$ cu a şi b cifre nenule diferite. Care este cel mai mic număr de astfel de numere pe care trebuie să le alegem pentru a fi siguri că găsim două a căror sumă să fie 100?

* * *

Soluţie: În primul rând trebuie să aflăm câte numere respectă condiţiile din enunţ (au două cifre nenule, diferite). Cifra zecilor poate fi înlocuită în 9 moduri, iar cifra unităţilor în 8 moduri. Aşadar sunt $9 \times 8 = 72$ de numere.

Le putem împărţi în două grupe: cele mai mici sau egale cu 49 şi cele mai mari sau egale cu 51.

Pentru a obţine suma 100, trebuie să avem un număr din prima grupă şi un număr din a doua grupă.

Să ne gândim acum la cele mai nefavorabile situaţii.

1. Pot alege numerele 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97 sau 98. Pentru ele nu există numere de două cifre cu care să le adunăm şi să obţinem 100.

2. Există numerele 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 care dau 100 numai dacă le adun cu numere cu cifre identice (88, 77, 66, 55, 44, 33, 22, respectiv 11).

Avem aşadar posibilitatea să alegem 16 numere şi să nu găsim două a căror sumă să dea 100.

Ne rămân încă 56 de numere $(72 - 16 = 56)$. Jumătate (28) dintre acestea sunt mai mici sau egale cu 49, cealaltă jumătate (28) sunt mai mari sau egale cu 51.

O situaţie nefericită ar fi să le aleg pe toate cele mai mici sau egale cu 49.

Cu acestea 28 şi cu cele 16 de mai devreme tot nu găsesc două a căror sumă să fie 100. Dar acum, cu încă un număr din cealaltă grupă sigur găsesc două a căror sumă să fie 100.

În concluzie, trebuie să alegem

$$28 + 16 + 1 = 45 \quad \text{(de numere)}.$$