Problema 1. Determinaţi numerele $\overline{abcd}$ astfel încât

$$a\cdot(b+c)+d\cdot(a+b)+c\cdot(b+d)=\overline{ab}\cdot(10c+d).$$

Mihai Bunget, Târgu Jiu

Soluție

Din enunț a este cifră nenulă. Relația din enunț se mai scrie $ab+ac+da+db+cb+cd=(10a+b)(10c+d)$

$\Leftrightarrow ab+ac+da+db+cb+cd=10a\cdot(10c+d)+b\cdot(10c+d)$

$\Leftrightarrow ab+ac+ad+bd+bc+cd=100ac+10ad+10bc+bd$

$\Rightarrow ab+ac+ad+bc+cd=100ac+10ad+10bc.$

Scădem ac

$ab+ad+bc+cd=99ac+10ad+10bc.$

Scădem $(ad+bc)$

$\Rightarrow ab+cd=99ac+9ad+9bc$ (1)

Însă $ab+cd\leq 9\cdot 9+9\cdot 9\Rightarrow ab+cd$ poate fi cel mult $81\cdot 2=162$

Dar, din (1) $\Rightarrow 99ac\leq ab+cd\Rightarrow 99ac\leq 162 \mid :9$

$\Rightarrow 11ac\leq 18$. Deci $a\cdot c$ poate fi 0 sau 1.

Cazul I $a\cdot c=0\Rightarrow c=0$ și $a\neq 0$ cifră oarecare $\Rightarrow$ Relația (1) devine: $ab+0=0+9ad+0\Rightarrow ab=9ad \mid :a\Rightarrow b=9d$ și, cum b și d sunt cifre $\Rightarrow b=0,\ d=0$ sau $b=9,\ d=1\Rightarrow \overline{abcd}\in\{\overline{a000},\ \overline{a901}\}\Rightarrow 9+9=18$ soluții

Cazul II $a\cdot c=1\Rightarrow a=c=1\Rightarrow$ Relația (1) devine $b+d=99+9d+9b\Rightarrow 8b+8d+99=0$ Fals

Deci, $\overline{abcd}\in\{1000, 2000, \ldots 9000;\ 1901, 2901, 3901, \ldots, 9901\}$

Soluție dată de elevul ILIESCU NAVIA clasa a VI-a, CN, GH. ȚIȚEICA, DR. TR. SEVERIN, prof. îndrumător IAN NEGOIANU