Problema nr. 1

Determinaţi mulţimea $M = \{n \in N \mid 2^n + 1 \ \ sau \ \ 2^n - 1 \ \ sunt \ \ pătrate \ \ perfecte\}$

***

Rezolvare.

Vom arăta că $M = \{0,1,3\}$.

Determinăm valorile lui n pentru care $2^n + 1$ **este pătrat perfect.**

Observăm , pentru început , că n=3 convine iar n=0 nu convine. Căutăm valorile naturale nenule diferite de 3.

Pentru $n \in \{4k, 4k+1\}$ numărul $2^n + 1$ nu este pătrat perfect , datorită ultimei cifre.

Pentru $n = 4k+2$ obţinem : $2^n + 1 = p^2 \Leftrightarrow 2^{4k+2} - p^2 = -1 \Leftrightarrow \left(2^{2k+1} - p\right)\cdot\left(2^{2k+1} + p\right) = -1$, ceea ce conduce la $2^{2k+2} = 0$, evident imposibil. Deci nu există soluţii de forma n= 4k+2.

Pentru $n = 4k+3, k \geq 1$ numărul $2^n + 1$ se divide cu 3 şi nu se divide cu 9 , deci nu poate fi pătrat perfect.

Determinăm valorile lui n pentru care $2^n - 1$ **este pătrat perfect.**

Observăm , pentru început , ca n=0 şi n=1 convin. Căutăm valorile naturale nenule diferite de 1.

Pentru $n \in \{4k+2, 4k+3\}$ numărul $2^n - 1$ nu este pătrat perfect , datorită ultimei cifre.

Pentru $n = 4k$ obţinem : $2^n - 1 = p^2 \Leftrightarrow 2^{4k} - p^2 = 1 \Leftrightarrow \left(2^{2k} - p\right)\cdot\left(2^{2k} + p\right) = 1$, ceea ce conduce la $2^{2k+1} = 2$,adică k=0 . Deci nu există soluţii de forma n= 4k diferite de 0.

Pentru $n = 4k+1, k \geq 1$ numărul $2^{4k+1} - 1$ este de forma 8p+7 şi nu poate fi pătrat perfect.

În concluzie , mulţimea căutată este $M = \{0,1,3\}$.