Comentarii la concursul CALUDE 2013, Galaţi

Abstract. Comments on some problems of the Calude contest, Galaţi, October 26-27, 2013.

Data: 28 octombrie 2013.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Această prezentare, însoţită de comentarii asupra celei de a XIV-a ediţii a concursului Calude, Galaţi, 26-27 octombrie 2013, este, după convenţia general acceptată, opinia personală a autorului.[1]

Voi indica prin culoarea **roşie** eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea **albastră** pentru comentariile personale.

2. Clasa a VII-a

Subiectul (2). *b) Se consideră* 2013 *numere naturale nenule cu proprietatea că suma inverselor lor este mai mare sau egală decât ca* 11. *Demonstraţi că cel puţin două numere naturale dintre cele* 2013 *numere naturale nenule sunt egale.*

Marin Dolteanu, *Galaţi*

Soluţie. O altă irupere a chestiunilor banale din clase superioare în universul celor mici. Manipularea seriei armonice este elementară către clasele a X-a şi a XI-a, dar astfel introducem juniorii în probleme neinteresante pentru ei. Şi oricum, cum poate fi semnată o astfel de întrebare?

Bazată pe ultra-cunoscuta inegalitate $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} < n$, care provine din

$$\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} \frac{1}{k} < \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} \frac{1}{2^{m-1}} = 1,$$

pentru $2 \le m \le n$. Deoarece $2013 < 2^{11} - 1$, rezultă că cel puţin două dintre numere se repetă. Dar de fapt inegalitatea este slabă; cea mai bună este $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} < n \ln 2 + 1$, cu o sumă mai mică decât 11 pentru $2^{14} - 1$ numere naturale nenule distincte. □

Subiectul (3). *Fie a, b, c şi d numere întregi impare astfel încât:*

$$0 < a < b < c < d,\ ad = bc,\ a + d = 2^k \text{ şi } b + c = 2^m,$$

unde $m, k \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că $a = 1$.

***

[1] Subiecte, soluţii oficiale şi rezultate complete la `http://mategl.com/`

Soluţie. Problema este foarte frumoasă, dar mult **prea grea** pentru nivelul acestui concurs; primii cinci clasaţi – cu premii – au totalizat doar 5/35 puncte pe această problemă.

Fie $ad = bc = r^2$; atunci, deoarece $0 < a < b < c < d$, vor exista $0 < x < y < 1$ astfel încât să avem $a = xr, b = yr, c = \frac{1}{y}r, d = \frac{1}{x}r$, şi atunci $2^k = a + d = \left(x + \frac{1}{x}\right) r > \left(y + \frac{1}{y}\right) r = b + c = 2^m$, căci funcţia $t \mapsto t + \frac{1}{t}$ este descrescătoare pe $(0, 1)$. Rezultă $k > m$.

Scriem acum $a(2^k - a) = b(2^m - b)$, de unde $(b-a)(b+a) = 2^m(b - 2^{k-m}a)$. Avem $\text{cmmdc}(b - a, b + a) = 2\,\text{cmmdc}(a, b)$, deci 2^{m-1} divide unul dintre factorii $b \pm a$, dar atunci $2^{m-1} \le b \pm a < b + c = 2^m$, ceea ce forţează $b \pm a = 2^{m-1}$. Drept consecinţă $\text{cmmdc}(a, b) = 1$. În mod similar, pornind cu $a(2^k - a) = c(2^m - c)$, obţinem $\text{cmmdc}(a, c) = 1$. Dar $ad = bc$, deci $a \mid bc$, ceea ce forţează $a = 1$. Faptul că şi $\text{cmmdc}(b, c) = 1$, obţinut în soluţia oficială, este irelevant; oricum avem şi $\text{cmmdc}(a, d) = 1$.

Şi într-adevăr pentru orice $m \ge 3$ există soluţia $k = 2(m - 1)$, cu $(a, b, c, d) = (1, 2^{m-1} - 1, 2^{m-1} + 1, 4^{m-1} - 1)$. Este ciudat că propunătorii problemei s-au oprit aici. Cu un mic efort suplimentar vom demonstra că **singurele** soluţii sunt cele "ghicite" mai sus. Este întotdeauna satisfăcător să spunem cât mai mult, dacă nu chiar **totul**, despre chestiunea examinată. Dar mulţi se opresc pe parcurs, şi prezintă doar un rezultat incomplet, din păcate (din lene, sau ... ?)

Avem deci $b+c = 2^m$, $bc = d = 2^k - 1$, deci b, c sunt rădăcinile trinomului $\lambda^2 - 2^m\lambda + (2^k - 1) = 0$. Atunci discriminantul trebuie să fie pătrat perfect, deci $2^{2(m-1)} - 2^k + 1 = \Delta^2$, sau $(\Delta - 1)(\Delta + 1) = 2^k(2^{2m-k-2} - 1)$. Un argument asemănător cu cel de mai sus arată că $\text{cmmdc}(\Delta - 1, \Delta + 1) = 2$, deci 2^{k-1} divide unul dintre factorii $\Delta \pm 1$. Dar dacă $2m - k - 2 > 0$, vom avea $\Delta + 1 \ge 2^{k-1}$, deci $\Delta - 1 \ge 2^{k-1} - 2 > 2(2^{2m-k-2} - 1)$, căci $k > m$, prin urmare $(\Delta + 1)(\Delta - 1) > (2^{k-1})2(2^{2m-k-2} - 1) = (\Delta - 1)(\Delta + 1)$, absurd. Rezultă că trebuie să avem $2m - k - 2 = 0$, deci $\Delta = 1$, şi atunci $b = 2^m - 1$, $c = 2^m + 1$ şi $d = 2^k - 1 = 4^{m-1} - 1$, după cum am promis mai sus. □

Remarcă. O informaţie de ultim moment localizează această problemă ca fiind OIM 1984, Problema 6, propusă de Polonia (dar tot doar în forma incompletă, cerând doar $a = 1$).[2] Cale lungă! – de la Problema 6 (cea mai grea într-o OIM) din 1984 la o problemă de clasa a VII-a dintr-un concurs interjudeţean din 2013. Să ne mai mirăm de rezultate?

O problemă cu enunţ asemănător, dar altfel complet diferită (şi cu mult mai simplă) se pare că provine din revista Parabola nr. 1, 1985 (Australia). Fie numerele întregi pozitive a, b, c, d cu $ad = bc$. Atunci $a + b + c + d$ nu poate fi număr prim. Soluţia este extrem de rapidă.

Avem $(a+b+c+d)d = ad+bd+cd+d^2 = bc+bd+cd+d^2 = (b+d)(c+d)$. Dar $a+b+c+d$ este mai mare decât fiecare din factorii $b+d > 1$ şi $c+d > 1$, deci nu poate fi număr prim. ■

[2] Soluţia din IMO COMPENDIUM (pagina 470, Problema 16 din ShortList 1984); vezi `http://bolyai.cs.elte.hu/ nagyzoli/compendium.pdf`
face referinţă în remarca finală că toate soluţiile pot fi precizate (forma de mai sus), dar fără demonstraţie.

3. Clasa a VIII-a

Subiectul (2). *b) Se consideră numărul natural* $x = 112\underbrace{000\ldots0}_{n \text{ zerouri}}896$. *Să se determine* $n \in \mathbb{N}$ *pentru care numărul* x *este pătrat perfect.*

Alexandru Ionescu, Galaţi

Soluţie. Avem $x = 112 \cdot 10^{n+3} + 896 = 2^4 \cdot 7(10^{n+3} + 8) = 2^7 \cdot 7(2^n \cdot 5^{n+3} + 1)$. Pentru $n > 0$ avem deci $2^7 \mid x$ şi $2^8 \nmid x$, deci x nu poate fi pătrat perfect. Pentru $n = 0$ avem însă $x = 2^7 \cdot 7(5^3 + 1) = (2^4 \cdot 3 \cdot 7)^2$.

Dintr-o orbire a autorului şi a celor care au pregătit problema, soluţia oficială se complică în mod inimaginabil, considerând posibilităţile pentru ultima cifră a unui număr $7k^2$, cu o discuţie subsecventă pe cazuri, care mai bine rămâne trecută în tăcere ... Este evident că problema a fost intenţionat "compusă" pentru a face astfel de jonglerii şi acrobaţii ca cele prezentate în soluţia oficială; în limbaj şahistic, o soluţie neintenţionată, care reduce problema la ridicul, se numeşte *cook*. □

Subiectul (3). *a) Punctele* M_1, M_2, M_3, M_4 *în plan verifică proprietatea că distanţa dintre oricare două dintre ele se află în intervalul* $[2013;,2013\sqrt{2}]$. *Să se demonstreze că există un cerc pe care sunt situate cele patru puncte, a cărui rază se cere a fi precizată.*

Prelucrare Constantin Ursu, *Galaţi*

Soluţie. Numărul 2013 nu joacă, ca de obicei, niciun rol; pentru distanţe situate în $[d, d\sqrt{2}]$ tristul adevăr ascuns este că singura posibilitate este ca cele patru puncte să fie vârfurile unui pătrat de latură d, înscris deci într-un cerc de rază $d\sqrt{2}/2$. Iarăşi pernicioasa ascundere a faptelor sub cortina unui enunţ "mai general" (cerând doar conciclicitatea punctelor). □

4. Clasa a IX-a

Subiectul (1). *Să se rezolve în* $\mathbb{R}_+$ *ecuaţia:*

$$(5x^2 + 3x + 2)(5y^2 - 3y + 2) = 31xy.$$

Petre Bătrâneţu, Galaţi

Soluţie. Din moment ce $5t^2 \pm 3t + 2 = \frac{1}{20}(10t \pm 3)^2 + \frac{31}{20} > 0$, rezultă că x, y sunt nenule. Scriem atunci $31 = \left(5x + \frac{2}{x} + 3\right)\left(5y + \frac{2}{y} - 3\right)$, şi cum $5t + \frac{2}{t} \geq 2\sqrt{10}$, rezultă $31 \geq (2\sqrt{10} + 3)(2\sqrt{10} - 3) = 31$, deci soluţiile sunt cazul de egalitate $x = y = \sqrt{\frac{2}{5}}$. O tipică simulare de ecuaţie, care de fapt nu se rezolvă, ci se reduce la cazul de egalitate al unei inegalităţi. M-am cam plictisit de asemenea "idei", mai bine lăsate pentru a fi lucrate la clasă. □

5. Clasa a X-a

Subiectul (2). *Determinaţi funcţiile* $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *care verifică relaţia*

$$f(f(n+1) + 3) = n,$$

$\forall$ *pentru orice* $n \in \mathbb{Z}$.

***

Soluţie. Mai întâi şi întâi, scriem relaţia în forma mai simplă şi simetrică $f(f(n+3)+3) = n+2$. Ca de obicei, pentru relaţii cu iterări de funcţii, mai aplicăm o iterare către $f(f(n+3)+3)+3 = n+5$, şi obţinem

$$f(n+3)+2 = f(f(f(n+3)+3)+3) = f(n+5),$$

sau, cu o substituire de variabilă, $f(k+2) = f(k)+2$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$. Prin simplă inducţie obţinem $f(2k) = 2k + f(0)$ şi $f(2k+1) = 2k + f(1)$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$. Dar din relaţia iniţială reiese imediat că f este bijectivă, deci $f(0) \neq f(1)$; mai mult, aceste valori trebuie deci să aibă parităţi diferite.

• Pentru $f(0)$ impar se vede atunci că pentru o astfel de funcţie avem, pentru $n+1 = 2k$,

$$f(f(n+1)+3) = f(2k+f(0)+3) = (2k+f(0)+3)+f(0),$$

dar şi $n = 2k-1$, deci $f(0) = -2$, contradicţie, deci acest caz nu este posibil. Soluţia oficială conţine o greşeală de calcul, şi nici nu pune clar în evidenţă contradicţia.

• Pentru $f(0)$ par (şi $f(1)$ impar) se vede atunci că pentru o astfel de funcţie avem, pentru $n+1 = 2k$,

$$f(f(n+1)+3) = f(2k+f(0)+3) = (2k+f(0)+2)+f(1),$$

dar şi $n = 2k-1$, deci $f(0)+f(1) = -3$. Pentru $n+1 = 2k+1$ avem

$$f(f(n+1)+3) = f(2k+f(1)+3) = (2k+f(1)+3)+f(0),$$

dar şi $n = 2k$, deci iarăşi $f(0)+f(1) = -3$. Prin urmare orice valori, pară pentru $f(0)$ şi impară pentru $f(1)$, cu $f(0)+f(1) = -3$, determină o soluţie, şi toate soluţiile sunt de această formă. □

Subiectul (3). *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale, pozitive. Arătaţi că mulţimea*

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \ ; \ \frac{1+a_n}{a_{n-1}} > \left| \cos a_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sin a_{n-1} \right| \right\}$$

este infinită.

Iuliana Duma, Galaţi

Soluţie. O problemă mai mult de clasa a XI-a decât de a X-a. Într-o formă sau alta, revine la divergenţa unei serii cunoscute; iar forma trigonometrică este o complicaţie formală de gust îndoielnic, un aşa numit red herring.

Dacă inegalitatea este inversă de la un rang N încolo, vom avea

$$\frac{1+a_n}{a_{n-1}} \leq \left| \cos a_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sin a_{n-1} \right| \leq \sqrt{(\cos^2 a_{n-1} + \sin^2 a_{n-1})(1+1/n)}$$

din Cauchy-Schwarz, deci $\dfrac{1+a_n}{a_{n-1}} \leq \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$, pentru orice $n \geq N$. Scriem aceasta ca

$$a_{N-1} \geq \sqrt{\frac{N}{N+1}}(1+a_N) \geq \sqrt{\frac{N}{N+1}} + \sqrt{\frac{N}{N+2}}(1+a_{N+1}) \geq \cdots$$

şi prin iterare, pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{N-1} \geq \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\frac{N}{N+k}} + \sqrt{\frac{N}{N+m}}\, a_{N+m-1} > \sqrt{N} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{N+k}}.$$

Dar seria $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ este divergentă, deci orice rest al ei este şi el divergent, ceea ce duce la concluzia $a_{N-1} = \infty$, absurd. $\square$

6. Clasa a XI-a

Subiectul (2). *Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul:*

$$\begin{cases} \dfrac{x}{5(x^2+1)} = \dfrac{y}{6(y^2+1)} = \dfrac{z}{7(z^2+1)} \\ \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$

Vasile Popa, Galaţi

Soluţie. Reminiscenţe C. Ionescu-Ţiu! Configuraţie de geometrie metrică, cu trigonometria tradusă în algebră.

Expresia $xy + yz + zx = 1$ trimite la substituţiile $x = \tan\alpha$, $y = \tan\beta$, $z = \tan\gamma$, cu $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ (pentru cazul $x, y, z > 0$). Apoi ne uităm la un triunghi de laturi $5, 6, 7$ şi unghiuri $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$, şi exprimăm cantităţile după formule trigonometrice cunoscute (dar plicticoase). Se obţine în final $x = \varepsilon\frac{3\sqrt{6}}{18}$, $y = \varepsilon\frac{4\sqrt{6}}{18}$, $z = \varepsilon\frac{6\sqrt{6}}{18}$, cu $\varepsilon = \pm 1$. $\square$

Subiectul (3). *Fiind dat $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se determine numărul maxim de termeni nenuli din suma $\sum_{i,j=1}^{n} |f(i) - f(j)|$ după toate alegerile funcţiei $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{a, b, c\}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ sunt fixate şi distincte două câte două.*

Dorin Andrica

Soluţie. Ce treabă are suma aceea? e doar o întrebare despre numărul de expresii $f(i) - f(j) \neq 0$, şi care nu are nimic de-a face cu suma modulelor, care depinde de a, b, c. Soluţia oficială se complică apoi în mod nejustificat.

Notând cu x, y, respectiv z numărul elementelor peste care f ia valoarea a, b, respectiv c, este clar că numărul expresiilor nenule este $2(xy + yz + zx)$, cu $x + y + z = n$. Valoarea maximă se obţine când partiţia este quasi-echipartită, deci $(x, y, z) = (k, k, k)$ când $n = 3k$, sau $(x, y, z) = (k, k, k+1)$ când $n = 3k+1$, sau $(x, y, z) = (k, k+1, k+1)$ când $n = 3k+2$. Fenomenul este banal, din inegalitatea Maclaurin $3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2$, cu restricţia că x, y, z sunt numere naturale (deci cazurile extremale trebuie ajustate corespunzător); şi este caracteristic grafului maximal Turán. $\square$

7. Clasa a XII-a

Subiectul (1). *a) Fie $a \in (1, \infty)$ şi funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care avem $\ln(f(x)^2 + 1) + af(x) = x$, $\forall$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că funcţia f admite primitive.*

Mihai Dragoş Totolici, *Galaţi*

b) Pe mulţimea M se ia o operaţie (notată multiplicativ), cu proprietatea $x(yx) = y$, $\forall$ pentru orice $x, y \in M$. Să se demonstreze că fiecare din ecuaţiile $ax = b$ şi $xa = b$, unde $a, b \in M$, au are soluţie unică în M.

***

Soluţie. a) Ideea (similară cu cea pentru Problema 3) este de a considera funcţia $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $g(t) = \ln(t^2+1)+at$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Funcţia g este evident derivabilă, cu $g'(t) = \dfrac{at^2+2t+a}{t^2+1} = \dfrac{(at+1)^2+(a^2-1)}{a(t^2+1)} > 0$, deci g este strict crescătoare. Cum avem $\lim\limits_{t\to-\infty} g(t) = -\infty$ şi de asemenea $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \infty$, rezultă că g este o bijecţie a lui $\mathbb{R}$. Dar atunci, având $g(f(x)) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă $f = g^{-1}$, bijecţie crescătoare a lui $\mathbb{R}$, deci continuă. Nu era oare suficient să se ceară continuitatea? Cerinţa primitivelor doar măsluieşte problema ca apărând a fi de clasa a XII-a.

b) Soluţia oficială se complică mult prea tare; chiar şi relaţia simetrică $(xy)x = y$, pentru orice $x, y \in M$, nu este neapărat necesar a fi demonstrată.

1. $ax = b$ duce la $a = x(ax) = xb$, şi apoi $ba = b(xb) = x$, deci ecuaţia nu poate avea ca soluţie decât $x = ba$; şi într-adevăr $a(ba) = b$.

2. $xa = b$ duce la $x = a(xa) = ab$, deci ecuaţia nu poate avea ca soluţie decât $x = ab$; şi într-adevăr $(ab)a = (ab)(b(ab)) = b$. □

Subiectul (3). *Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă.*

a) Demonstraţi că f este continuă.

b) Demonstraţi că există o funcţie $g\colon [0;,\infty) \to \mathbb{R}$, unic determinată, astfel încât $f(x+g(x)) = f(g(x)) - g(x)$, pentru orice $x \geq 0$.

ONM 2005, Dan Schwarz

Soluţie. Subiectul pune $***$ la autor, fără să dea creditul cuvenit (problema apare, cu autor, în **RMC 2005**). De asemenea, punctul a) (care fusese adăugat în 2005 fără acordul autorului) trebuia eliminat, căci este doar un rezultat "de manual". Deoarece continuitatea funcţiei f este instrumentală în soluţia punctului b), s-a considerat atunci binevenit să se "indice" acest lucru printr-o întrebare suplimentară. Urmează doar soluţia punctului b).

Ideea este de a considera, pentru $x \geq 0$ fixat, funcţia $f_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $f_x(t) = f(x+t)-f(t)$. Funcţia f fiind convexă, rezultă că f_x este crescătoare. Atunci funcţia $h_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $h_x(t) = f_x(t)+t$ este strict crescătoare. Dar atunci $h_x(-|f_x(0)|) = f_x(-|f_x(0)|) + (-|f_x(0)|) \leq f_x(0) - |f_x(0)| \leq 0$, dar şi $h_x(|f_x(0)|) = f_x(|f_x(0)|) + |f_x(0)| \geq f_x(0) + |f_x(0)| \geq 0$; cum h_x (care este evident continuă) îşi schimbă semnul pe intervalul $[-|f_x(0)|, |f_x(0)|]$, rezultă că se anulează într-un punct t_x din acest interval. Dar h_x fiind strict crescătoare, acest punct t_x este unic determinat; nu ne mai rămâne decât să luăm $g(x) = t_x$, şi problema este soluţionată. □

8. Încheiere

Subiectele (şi soluţiile) sunt scrise în WORD, şi arată foarte urât – vezi de exemplu clasa a XI-a. Greşeli de limbă sunt prezente, iar unele notaţii matematice sunt caduce, de exemplu abuzul de cuantificatori $\forall$, sau folosirea semnului de înmulţire, ca în $x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x$, în loc de $xy + yz + zx$. De mult timp deja, folosirea LaTeX este aproape obligatorie pentru calitatea estetică a materialelor matematice – şi nu e chiar atât de greu să ne conformăm, eh?

A fost şi o probă pe echipe, dar n-am găsit nimic interesant şi demn de a fi comentat acolo.