

Problema 4. La o petrecere, un participant este numit „*timid*” dacă el sau ea cunoaște cel mult trei dintre ceilalți participanți. Arătați că dacă fiecare participant cunoaște cel puțin trei timizi, atunci toți participanții sunt timizi. Ce valori posibile poate lua numărul participanților la această petrecere? (Se consideră că dacă un participant A îl cunoaște pe B, atunci și B îl cunoaște pe A.)

Concursul KöMaL, 1998

Soluție:

Fiecare timid cunoaște exact 3 timizi și niciun netimid. Așadar, timizii nu cunosc netimizi, prin urmare nu există netimizi. Sunt cel puțin 4 timizi. Fie n numărul participanților la petrecere. Fiecare timid cunoaște 3, deci sunt $3n$ cunoștințe; dar ele sunt reciproce deci fiecare este numărată de două ori. Rezultă că $3n$ trebuie să fie număr par, adică n trebuie să fie par.

Reciproc, pentru orice $n \geq 4$ par, există astfel de petreceri: îi dispunem pe participanți pe un cerc, în vârfurile unui poligon regulat cu n laturi și spunem că fiecare participant își cunoaște vecinii și diametral opusul. (Diametral opusul este tot un vârf al poligonului regulat deoarece acesta are un număr par de laturi.)