Clasa a X-a - Etapa 2 - Problema 3

Enunţ. *Demonstraţi că*

$$\log_n(n+1) + \log_{n+1} n \notin \mathbb{Z},$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Soluţie. Presupunem că există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\log_n(n+1) + \log_{n+1} n = k$. Cu notaţia $t = \log_n n$, obţinem $t + t^{-1} = k$. Evident $t > 1$, iar inegalitatea mediilor conduce la $k > 2$.

Demonstrăm relaţia $k < 3$. Aceasta este echivalent cu $t + t^{-1} < 3$ sau $t^2 - 3t + 1 < 0$, adică $t \in \left(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. Ultima relaţie este echivalentă cu $\log_n(n+1) < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, ceea ce este adevărat deoarece, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, avem

$$\log_n(n+1) < \log_n n^2 = 2 < \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

$\square$