

Problema 2. Ana desenează pe tablă un pătrat roșu după care Alin desenează 2 pătrate albastre, cu unul mai mult decât Ana. Apoi Ana desenează 3 pătrate roșii (cu unul mai mult decât Alin) și Alin 4 pătrate albastre (cu unul mai mult decât Ana), și așa mai departe. Arătați că niciodată numărul total al pătratelor desenate de Ana nu poate fi egal cu numărul total al pătratelor desenate de Alin.

* * *

Soluție: Ana desenează $1, 3, 5, \dots, 2k - 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) pătrate, iar Alin desenează $2, 4, 6, \dots, 2p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) pătrate.

Avem

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

și

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2p = p(p + 1)$$

Numărul pătratelor desenate de Alin este produs de două numere consecutive, iar numărul pătratelor desenate de Ana este pătrat perfect.

Cum produsul a două numere consecutive nu este pătrat perfect, rezultă concluzia.