

Etapa 5, Problema 4

Notăm cu C_n al n -lea număr Catalan. Demonstrați că singurele numere Catalan prime sunt C_2 și C_3 .

Soluție.

Evident, numerele $C_2 = 2$ și $C_3 = 5$ sunt prime, iar $C_4 = 14$ nu este prim.

Presupunem, prin absurd, că există $n \geq 5$ pentru care C_n este număr prim.

Ținând seama de relația $(n+2)C_{n+1} = (4n+2)C_n$, distingem două situații:

- $C_n \mid n+2$. Acest caz nu este posibil, deoarece $C_n > n+2$ pentru $n \geq 5$.
- $C_n \mid C_{n+1}$. Rezultă existența unui $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $C_{n+1} = kC_n$; înlocuind, obținem că $4n+2 = k(n+2)$, deci $\frac{4n+2}{n+2} \in \mathbb{N}$, de unde $n+2 \mid 6$, ceea ce este imposibil pentru $n \geq 5$.