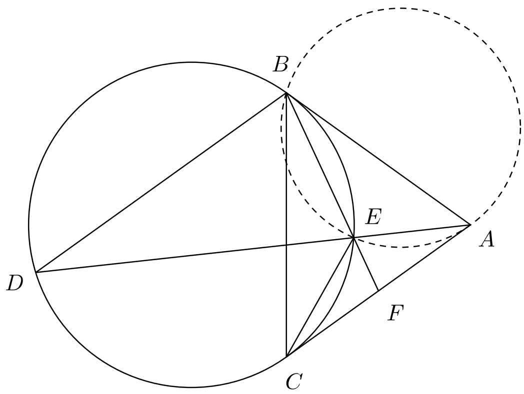
Se consideră un cerc $\mathcal{C}$ şi un punct A exterior acestuia. Din A se duc tangentele AB şi AC la cercul $\mathcal{C}$. Paralela prin B la AC intersectează $\mathcal{C}$ în D, iar dreapta AD intersectează $\mathcal{C}$ în punctul E.
Demonstraţi că dreapta BE conţine mijlocul segmentului (AC).

din *Culegere de probleme de geometrie*, autori *I.C. Drăghicescu, V. Masgras*[1]

Soluţia 1. Notăm $BE \cap AC = \{F\}$. Folosind puterea punctului F faţă de cerc avem $|\rho(F)| = CF^2 = FE \cdot FB$. Problema revine astfel la a arăta că $FA^2 = FE \cdot FB$, sau $\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{FE}{FA}$. Cum $\angle FAE \equiv \angle ADB$ (alterne interne) şi $\angle ADB \equiv \angle ABE$, iar $\angle AFE \equiv \angle BFA$, deducem că $\Delta\, AFE \sim \Delta\, BFA$, de unde $\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{FE}{FA}$.

Observaţie. Faptul că trebuie să arătăm că BE trece prin mijlocul tangentei (AC) ne poate sugera să folosim proprietatea, prezentată în materialul teoretic de la această etapă, că axa radicală a două cercuri trece prin mijlocul tangentei comune la cele două cercuri. Cum axa radicală a două cercuri secante este dreapta determinată de punctele lor de intersecţie, este suficient să arătăm că CA este tangentă cercului circumscris triunghiului ABE. Acest lucru este imediat: din $\angle CAE \equiv \angle BDA$ (alterne interne) şi $\angle BDA \equiv \angle ABE$ (ambele subîntind arcul BE al cercului $\mathcal{C}$) rezultă că $\angle CAE \equiv \angle ABE$ ceea ce arată că AC este tangentă cercului circumscris triunghiului ABE.



[1] Editura Tehnică, 1987

Soluţia 2. (dată de *Ştefan Tudose*)
Fie $\{M\} = AD \cap BC$ şi $\{F\} = BE \cap AC$. Deoarece AB şi AC sunt tangente la cercul $\mathcal{C}$, BC este polara lui A în raport cu cercul $\mathcal{C}$, de unde rezultă că (A, M, E, D) este diviziune armonică, adică

$$\frac{EA}{EM} = \frac{DA}{DM} \qquad (1).$$

Pe de altă parte, triunghiurile CMA şi BMD sunt asemenea, de unde

$$\frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MD}, \text{ deci } \frac{BC}{BM} = \frac{DA}{MD} \qquad (2).$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$\frac{EA}{EM} = \frac{BC}{BM} \qquad (3).$$

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul AMC tăiat de transversala $F - E - B$ se obţine

$$\frac{BC}{BM} \cdot \frac{EM}{EA} \cdot \frac{FA}{FC} = 1,$$

de unde, folosind (3), $FA = FC$ şi concluzia.