# COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2014 FAZA LOCALĂ A MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

ABSTRACT. Comments on some of the problems presented at the Local Round of the National Mathematics Olympiad 2014, Bucharest & Ilfov.

Se adresează claselor IX, X, XI, XII.
Data: 25 februarie 2014.
Autor: Dan Schwarz-*Moromete*, Bucureşti.

## 1. Introducere

Aceste comentarii asupra Fazei Locale a Olimpiadei de Matematică 2014 a municipiului Bucureşti, reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului.[1] Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.[2]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

## 2. Clasa a IX-a

**Subiectul** (3)**.** *a) Să se arate că, dacă* $\alpha > 0$*, atunci valoarea maximă a funcţiei* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dată de* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+\alpha}$ *este* $\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}$.

*b) Arătaţi că, dacă* $a, b, c$ *sunt numere reale strict pozitive, atunci*

$$\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ca} + \frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Marian Cucoaneş, *G.M.-B. nr. 11/2013*

*Soluţie.* Parcă era în uz convenţia (greşită – după părerea mea) că zero este număr real pozitiv, deci trebuia folosit calificativul strict.

a) Avem $f(x) - \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}} = \dfrac{x}{x^2+\alpha} - \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}} = -\dfrac{(x-\sqrt{\alpha})^2}{x^2+\alpha} \leq 0$, cu egalitate pentru $x = \sqrt{\alpha}$.

---

[1]La sugestia unui *literato* prieten al meu, care vede acest spaţiu ca fiind ”poiana lui Iocan” a matematicii şcolare româneşti.

[2]Lipsesc multe probleme, la care nu am găsit interesul de a fi prezentate. De aceea, am completat prezentarea cu unele probleme de la faza locală a judeţului Ilfov, la care am şi acolo câte ceva de spus.

b) Deci $\sum_{cyc} \frac{a}{a^2+bc} \leq \frac{1}{2} \sum \frac{1}{\sqrt{bc}} \leq \frac{1}{2} \sum \frac{1}{a}$, din $\sum xy \leq \sum x^2$ (notând $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$ şi celelalte), cu egalitate pentru $a = b = c$. □

**Subiectul** (4)**.** *Se numerotează vârfurile unui cub* $ABCDEFGH$ *cu câte un număr natural de la* 1 *la* 8*, astfel încât oricăror două vârfuri distincte să li se atribuie numere diferite.*

*a) Se atribuie fiecărei feţe numărul egal cu suma numerelor atribuite vârfurilor care o determină. Să se arate că există patru feţe având suma numerelor atribuite egală cu* 72*.*

*b) Se atribuie fiecărei muchii numărul egal cu suma numerelor atribuite vârfurilor care o determină. Există o numerotare a vârfurilor pentru care numerele atribuite muchiilor sunt distincte două câte două?*

*Justificaţi răspunsul!*

Ovidiu Şontea & Mihai Bălună

*Soluţie.* La ce slujeşte oare identificarea $ABCDEFGH$ a cubului, când nicăieri, nici în enunţ nici în soluţia oficială, nu se face vorbire?

a) Suma numerelor atribuite oricărei perechi de feţe opuse ale cubului este egală cu 36, suma numerelor atribuite celor 8 vârfuri. Aşadar oricare două perechi de feţe opuse dau soluţia.

b) Cele 12 muchii ale cubului pot avea atribuite doar numere din mulţimea $M = \{3, 4, \ldots, 14, 15\}$, care conţine 13 elemente. Numerele $3, 4, 5, 6$ nu pot fi toate patru atribuite unor muchii (ar trebui să avem $1 + 2$, $1 + 3$, şi $1 + 4$ (căci $2 + 3$ nu mai este posibil); dar atunci nici $1 + 5$ nici $2 + 4$ nu mai sunt posibile). Analog, numerele $15, 14, 13, 12$ nu pot fi toate patru atribuite unor muchii. Două (cel puţin) numere din $M$ fiind inaccesibile, rezultă că două muchii vor avea atribuit acelaşi număr. □

## 3. Clasa a X-a

**Subiectul** (1 – **IF**)**.** *Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarei propoziţii:* ***"Există numere iraţionale care ridicate la puterea număr iraţional să dea număr raţional"****.*

*Soluţie.* Folclor urban. Soluţia cea mai elegantă (atribuită de unii lui Bebe Panaitopol) sună cam aşa. Desigur $\sqrt{2}$ este număr iraţional. Dacă $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ este raţional – am găsit; dacă nu, atunci $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ este număr iraţional, dar atunci $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ este raţional. Am demonstrat în acest fel existenţa unei astfel de perechi (chiar fără să ştim care dintre aceste expresii produce numărul raţional!).[3]

[3] De fapt, dintr-o teoremă crucială a lui Ghelfond, rezultă că $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ este iraţional (chiar transcendent), vezi `http://mathworld.wolfram.com/GelfondsTheorem.html`

Aceasta este şi **singura** propunere de soluţie din barem; **este probabil imposibil ca cineva să o găsească în concurs, fără a o fi ştiut din prealabil**.

Mai pedestru, numerele $\sqrt{2}$ şi $2\log_2 3$ sunt iraţionale (dacă $\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$, atunci $3 = 2^{\frac{p}{q}}$, deci $3^q = 2^p$, imposibil). Avem însă $\left(\sqrt{2}\right)^{2\log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3$, număr raţional. $\square$

Alegerea acestei întrebări ca Problema **1**, la faza locală, este de necrezut.

**Subiectul** (2)**.** *Fie $z \in \mathbb{C}$. Să se arate că $\sqrt{2}|z+1| = |z+i| + |z-i|$ dacă şi numai dacă $|z| = 1$ şi $\mathrm{Re}(z) \geq 0$.*

prelucrare(!?!) * * *

*Soluţie.* Cazul de egalitate al inegalităţii lui Ptolemeu aplicată punctelor de afixe $-1$, $-\mathrm{i}$, $z$ şi $\mathrm{i}$, echivalent cu $z$ pe semicercul unitate, de capete $-\mathrm{i}$ şi $\mathrm{i}$, care conţine punctul de afix 1. O demonstraţie directă (fără a se recurge la evidenţierea părţilor reală şi imaginară ale lui $z$) vine din cazul particular

$$|2\mathrm{i}(z+1)| = |(z-\mathrm{i})(\mathrm{i}-1) + (z+\mathrm{i})(\mathrm{i}+1)| \leq |(z-\mathrm{i})(\mathrm{i}-1)| + |(z+\mathrm{i})(\mathrm{i}+1)|$$

al cunoscutei identităţi care demonstrează şi cazul general. $\square$

**Subiectul** (3)**.** *Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia*

$$2^{\sin 3x} - 8^{\sin x} = \sin^3 x.$$

Traian Tămâian, *G.M.-B. nr. 2/2013*

*Soluţie.* Folosind cunoscuta relaţie $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, putem scrie forma echivalentă

$$2^{\sin 3x} + \frac{\sin 3x}{4} = 2^{3\sin x} + \frac{3\sin x}{4}.$$

Dar funcţia $t \mapsto 2^t + \dfrac{t}{4}$ este sumă de funcţii strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, ceea ce forţează $\sin 3x = 3\sin x$, deci $\sin x = 0$, cu soluţiile $\boxed{x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}}$. $\square$

**Subiectul** (4)**.** *Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia*

$$\sqrt[3]{x^6 + 7x^3} = \sqrt{x^4 + 8x} - x^2.$$

Eugen Radu

*Soluţie.* Pentru $x \neq 0$ ($\boxed{x = 0}$ este evident soluţie) putem scrie

$$x\sqrt[3]{x^3 + 7} = \frac{8x}{\sqrt{x^4 + 8x} + x^2}.$$

După simplificarea cu $x$, rezultă $x > -\sqrt[3]{7}$, deci $x > 0$ (pentru a avea $x^4 + 8x \geq 0$). Cum cei doi membri sunt de monotonie diferită, $\boxed{x = 1}$ este singura (cealaltă decât 0) soluţie reală. $\square$

Desigur (după cum e condusă soluţia oficială), era intenţionată rezolvarea în $\mathbb{R}$, ca şi în cazul Problemei 3, unde însă era clar specificat acest lucru. Cu atât mai mult, fiind o problemă de clasa a X-a, unde au fost introduse numerele complexe, lipsa acestei specificaţii putea sugera rezolvarea în $\mathbb{C}$. WolframAlpha oferă soluţiile complexe suplimentare $x = \sqrt[3]{\dfrac{-127 \pm 7\mathrm{i}\sqrt{47}}{18}}$, dacă interesează pe cineva acest lucru ...

## 4. Clasa a XI-a

**Subiectul** (3)**.** *Determinaţi matricele* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ *care au proprietatea* $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$.

Daniela Haret, *G.M.-B. nr. 12/2013*

*Soluţie.* Fie $d = \det A$ şi $t = \operatorname{tr} A$. Din $d^3 = \det(A^3) = 1$ rezultă $d = 1$. Atunci ecuaţia Hamilton-Cayley se scrie $A^2 - tA + I_2 = 0$, de unde avem $A^3 = tA^2 - A = (t^2-1)A - tI_2$. Luând urma, obţinem $18 = t(t^2-1) - 2t$, adică $(t-3)(t^2+3t+6) = 0$, cu singura soluţie reală $t = 3$.[4] Acuma $\begin{pmatrix} 5+3 & 8 \\ 8 & 13+3 \end{pmatrix} = A^3 + 3I_2 = 8A$ duce la singura soluţie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Putem remarca şi faptul că polinomul caracteristic $x^6 - 18x^3 + 1$ al matricei $A^3$ se factorizează

$$x^6 - 18x^3 + 1 = (x^2 - 3x + 1)(x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 3x + 1),$$

cu factorul $x^2 - 3x + 1$ fiind polinomul caracteristic al matricei $A$. □

**Subiectul** (4)**.** *Fie* $A$ *şi* $B$ *matrice* $2 \times 2$ *cu elemente întregi, astfel încât matricele* $A+B$, $A+2B$, $A+3B$, $A+4B$ *şi* $A+5B$ *să fie inversabile, iar inversele lor să aibă elemente întregi. Să se arate că matricea* $A+6B$ *este inversabilă, iar inversa ei are elemente întregi.*

***

*Soluţie.* Dacă o matrice inversabilă $M$ şi inversa ei, ambele, au elemente întregi, atunci evident $\det M = \pm 1$. Atunci, pentru funcţia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = \det(A + xB)$, care este funcţie polinomială de grad cel mult 2, deoarece una din funcţiile $f(x) - 1$ şi $f(x) + 1$ se anulează în cel puţin 3 puncte distincte, rezultă că $f(x)$ este constant egală cu $c \in \{-1, 1\}$, şi atunci $\det A = c = \pm 1$ şi $\det B = 0$ (dar nu este obligatoriu să avem $B = 0_2$).

---

[4] Soluţia oficială o ia pe altă cale, scriind $\begin{pmatrix} 5+t & 8 \\ 8 & 13+t \end{pmatrix} = (t^2-1)A$, de unde $t^2 - 1 \mid 8$, cu singurele posibilităţi $t = 0$, $t = \pm 3$, din care se afirmă (fără demonstraţie) că doar $t = 3$ convine. Dacă valorile elementelor lui $A^3$ ar fi fost diferite (mult mai mari), ar fi putut apare imens de multe cazuri de considerat în această abordare. Mai mult, să remarcăm că, prin soluţia mea, era suficient să se specifice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, în timp ce soluţia oficială nu se poate dispensa de ipoteza redundantă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Iar pentru $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mai apar două soluţii, generate de rădăcinile complexe ale lui $t^2 + 3t + 6 = 0$.

Rezultă că $A+nB$ este inversabilă pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, cu $\det(A+nB) = c$, aşadar şi inversa ei având elemente întregi. Să remarcăm şi că, dacă nu se dă informaţia despre $A+5B$, există contraexemple, cum ar fi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, pentru care $A+nB$ este inversabilă, dar nu mai are inversa în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ dacă $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1,2,3,4\}$. $\square$

## 5. Clasa a XII-a

**Subiectul** (3 – **IF**). *Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, $\forall$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$. Să se determine restul împărţirii lui $\underbrace{5 * 5 * \cdots * 5}_{\text{de } 2014 \text{ ori}}$ la $3^{2014}$.*

*Soluţie.* Acelaşi obositor abuz al ideii de *transport de structură* ... în plus, combinat cu afirmaţia paternalistă despre asociativitate, care este **dată**. Dacă avem o bijecţie $f\colon X \to G$, unde $(G, \circ)$ are structură de monoid, şi dacă definim $x * y = f^{-1}(f(x) \circ f(y))$ pentru $x, y \in X$, atunci $(X, *)$ are structură de monoid, izomorf (prin funcţia $f$) cu $(G, \circ)$. Acest lucru ne permite să evităm verificările plictisitoare de asociativitate, eventuală comutativitate, sau existenţă a elementului neutru. La noi $(G, \circ) = (\mathbb{Z}, \cdot)$, şi izomorfismul $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ este dat de $f(z) = z - 2$.

Iar acum, vedem că $\underbrace{5 * 5 * \cdots * 5}_{\text{de } 2014 \text{ ori}} = (5-2)^{2014} + 2 = 3^{2014} + 2$, deci răspunsul $\boxed{2}$ devine trivial. $\square$

**Subiectul** (1). *Pentru fiecare $p \in \mathbb{N}^*$ considerăm mulţimea*

$$U_p = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}.$$

*a) Să se arate că există $\omega \in U_p$ astfel încât $U_p = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{p-1}\}$.*

*b) Să se arate că, dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi mulţimea $U_m \cup U_n$ este parte stabilă în raport cu înmulţirea numerelor complexe, atunci $m$ divide $n$ sau $n$ divide $m$.*

***

*Soluţie.* Punctul a), trivial, este probabil intenţionat ca ”ajutător” pentru punctul b). Dar următorul bine-cunoscut rezultat general este la fel de uşor de probat, şi oferă un răspuns complet.

> Dacă $H, K$ sunt subgrupuri ale unui grup $(G, \circ)$, atunci $H \cup K$ este subgrup al lui $G$ dacă şi numai dacă $H \subseteq K$ sau $K \subseteq H$.[5]

Presupunem $H \setminus K \neq \emptyset \neq K \setminus H$; fie atunci $h \in H \setminus K$ şi $k \in K \setminus H$. Nu putem avea $h \circ k = h' \in H$, căci atunci $k = h^{-1} \circ h' \in H$; în mod similar, nu putem avea $h \circ k = k' \in K$, căci atunci $h = k' \circ k^{-1} \in K$. $\square$

[5] Achtung! pentru monoizi această afirmaţie este falsă; de exemplu pentru submonoizii lui $(\mathbb{N}, +)$ daţi de $H = \{0, 2\} \cup \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 4\}$ şi $K = \{0, 3\} \cup \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 4\}$.

**Subiectul** (3)**.** *Fie* $0 < a < b$ *şi* $f\colon [a,b] \to (0,+\infty)$ *o funcţie continuă.*

*a) Să se arate că pentru fiecare* $n \in \mathbb{N}^*$ *există şi este unic* $x_n \in (a,b)$ *astfel încât*

$$n \int_a^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_n}^b f(x)\,dx.$$

*b) Dacă* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este şirul definit la punctul a), să se calculeze* $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Florin Rotaru, *G.M.-B. nr. 4/2013*

*Soluţie.* a) Evident că $n = 0$ forţează $x_n = b$, deci nu există $x_n \in (a,b)$; din cele scrise la punctul b) putem deduce că intenţia autorului a fost $n \geq 1$, dar în România $0 \in \mathbb{N}$. Nu avem nevoie să introducem o primitivă $F$ a lui $f$ (ca în soluţia oficială). Este suficient să considerăm funcţia $g_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dată prin $g_n(x) = n \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t - \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t = (n+1) \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$. Funcţia $g_n$ fiind strict crescătoare şi continuă, cu $g_n(a) < 0$ şi $g_n(b) > 0$, există deci un unic $x_n \in (a,b)$ astfel încât $g_n(x_n) = 0$.

b) Având $0 < (x_n - a) \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int_a^{x_n} f(t)\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+1} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \to 0$ pentru $n \to \infty$, rezultă imediat că $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. $\square$

**Subiectul** (4)**.** *a) Să se arate că* $\sin x \geq x - \dfrac{x^3}{3!}$, *pentru orice* $x \geq 0$.

*b) Fie* $f\colon \mathbb{R}[0,1] \to [0,\infty)$ *o funcţie continuă. Arătaţi că*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

***

*Soluţie.* a) Insist asupra acestui punct doar din cauza amuzantei greşeli de tipar 3 în loc de 3!. Poate că cineva a considerat că semnul de exclamare nu are ce căuta într-o expresie matematică ... Din fericire $3 < 3!$, aşa că inegalitatea rămâne totuşi adevărată, deşi soluţia oficială conţine o patentă greşeală, inerentă acestui fapt (şi notează şi o funcţie auxiliară tot cu $f$).

b) Rezultatul cerut aici nu are însă nimic de-a face cu punctul a), şi în general cu funcţia sin. Să presupunem, în toată generalitatea, că avem o funcţie $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu singura proprietate că $\lim_{x\to 0} \dfrac{\varphi(x)}{x} = 1$, ceea ce forţează $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0$. Pentru orice $0 < \varepsilon < 1$ există $\delta > 0$ astfel încât $\left|\dfrac{\varphi(x)}{x} - 1\right| \leq \varepsilon$ pentru $0 < x \leq \delta$, şi există $N \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $0 \leq \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq \delta$ pentru orice $n \geq N$ şi $1 \leq k \leq n$, căci $f$ este mărginită pe $[0,1]$.

Prin urmare, sub aceste condiţii,

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \varphi\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leq (1+\varepsilon)\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, deci (prin trecere la limită cu $\varepsilon \to 0$)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Am mai văzut şi cu alte ocazii, chiar anul trecut, astfel de particularizări forţate, în care folosirea unui detaliu irelevant devine instrumentală în soluţia oficială. □

Subiectele clasei a XII-a au fost de data aceasta cu totul banale (de obicei ele erau de bună calitate, dar ceva mai grele decât cele ale celorlalte clase).

## 6. Încheiere

Calitatea etapei locale a Municipiului Bucureşti continuă să fie oleacă ameliorată faţă de un trecut nu foarte îndepărtat. Au fost totuşi destul de multe scăpări şi erori (în enunţuri şi soluţii), iar multe din probleme au rămas destul de neatractive.