Problemă. O funcţie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ se obţine $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \in \{f(a), f(b)\}$.
a) Daţi un exemplu de funcţie neconstantă f având proprietatea $\mathcal{P}$.
b) Demonstaţi că orice funcţie continuă f, având proprietatea $\mathcal{P}$, este constantă.

Dan-Ştefan Marinescu, Hunedoara

Soluţie.
a) Un exemplu de funcţie neconstantă care are proprietatea $\mathcal{P}$ este

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

b) Vom arăta mai întâi că dacă $c < d$ şi $f(c) = f(d) = \ell$ atunci f este constantă pe intervalul $[c, d]$.
Folosind proprietatea $\mathcal{P}$ rezultă că mulţimea

$$X = \{x \in [c, d] \mid f(x) = \ell\}$$

este densă în $[c, d]$. Cum f este continuă, rezultă $X = [c, d]$, adică f este constantă pe $[c, d]$.
Presupunem că există $a < b$ cu $f(a) \neq f(b)$.
Considerăm mulţimea $Y = \{x \in [a, b] \mid f(x) \in \{f(a), f(b)\}\}$, avem că Y este densă în $[a, b]$ şi, folosind continuitatea, rezultă că f este constantă pe $[a, b]$, ceea ce contrazice $f(a) \neq f(b)$.