Spargerea inegalităților

Aristotel, unul dintre cei mai mari filozofi ai Greciei Antice, a spus că *„cea mai rea formă a inegalității e să încerci să transformi inegalitățile în egalități”.* Inegalitățile reprezintă un capitol foarte interesant al matematicii și foarte întâlnit, mai ales la concursurile și olimpiadele școlare, însă este destul de puțin abordat la clasă. Întrucât acestea reprezintă o „lume” foarte largă, în acest articol vom prezenta o metodă de rezolvare a inegalităților foarte folositoare, care ne poate ajuta să împărțim o problemă în mai multe subprobleme cu rădăcină comună mai simplu de rezolvat.

În continuare, vom analiza mai multe tipuri de spargeri ale inegalităților cu câteva probleme de bază.

1. Spargeri clasice

Metoda pe care o discutăm în continuare se bazează pe ideea de a demonstra o inegalitate „pe bucăți”. Mai exact, aceasta înseamnă desfacerea, spargerea inegalităților date în inegalități „mai mici” din care inegalitatea inițială să se obtină prin sumare sau multiplicare. Cu alte cuvinte, se folosesc următoarele implicații:

$A \leq B$ și $C \leq D \Longrightarrow A+C \leq B+D \quad \forall A,B,C,D \in \mathbb{R}$

$A \leq B$ și $C \leq D \Longrightarrow AC \leq BD \quad \forall A,B,C,D > 0$

Fiecare dintre inegalitățile din concluzie se verifică cu egal dacă și numai dacă ambele inegalități din ipoteză se verifică cu egal.

1.1. Să se demonstreze că

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}, \qquad \forall\ a, b, c > 0 .$$

Căutăm o spargere care să antreneze expresia $\frac{ab}{a+b}$. Aceasta trebuie comparată cu o „bucată” din expresia $\frac{a+b+c}{2}$ care e firesc să conțină numai pe a și b. Să mai observăm că pentru $a=b=c$ în inegalitatea 1.1 avem egalitate. Atunci, în aceleași condiții trebuie să se obțină egalitate și în inegalitățile în care se sparge 1.1. Încercăm atunci cu $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$ care se reduce la $(a-b)^2 \geq 0$. Deci, inegalitatea 1.1 se sparge în :

$$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}, \qquad \frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{4}, \qquad \frac{ac}{a+c} \leq \frac{a+c}{4}$$

din care se obține prin însumare. Egalitatea are loc când $a = b = c$.

1.2. Să se demonstreze că

$$x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1} \leq xy \qquad \forall\ x, y > 1 .$$

Vom încerca să aducem inegalitatea într-o sumă de două funcții care depind doar de un singur parametru. După ce o punem sub forma $\frac{\sqrt{y-1}}{y} + \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq 1$, o desfacem în $\frac{\sqrt{y-1}}{y} \leq \frac{1}{2}$ și $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$, inegalități adevarate deoarece

$$\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} \leq x \Leftrightarrow 4(x-1) \leq x^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0 .$$

Egalitatea se obține când $x = y = 2$.

1.3. Să se arate că

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc \quad ,$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi.

Încercăm spargerea provocată de $a^2(b+c-a) \leq abc$. Inegalitatea nu se confirmă, fiind echivalentă cu $(a-b)(a-c) \geq 0$, inegalitate care nu este adevarată pentru $b < c < a$, de exemplu. Dar dacă o inegalitate de forma $A + B + C \leq \ldots$ nu s-a putut desface în inegalități de genul $A \leq \ldots$, $B \leq \ldots$, $C \leq \ldots$ nu înseamnă că nu putem găsi o spargere de tipul $A + B \leq \ldots$, $B + C \leq \ldots$, $C + A \leq \ldots$. Să testăm atunci inegalitatea

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) \leq 2abc .$$

Aceasta devine succesiv

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(a-b)(a^2 - ac - b^2 + bc) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(a-b)^2(a+b-c) \geq 0 ,$$

și este adevarată verificându-se cu egal când $a = b$. În concluzie, sumând inegalitățile:

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) \leq 2abc ,$$
$$a^2(b+c-a) + c^2(a+b-c) \leq 2abc ,$$
$$b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 2abc ,$$

obținem 1.3 multiplicată cu 2, care se verifică cu egal pentru $a = b = c$.

2. Spargerea cu medii

Pentru inegalitățile între polinoame simetrice circular avem un tip anume de spargere pe care o vom numi *spargere cu medii*. Reamintim că o expresie $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este simetrică circular dacă rămâne neschimbată la o *rotire* a variabilelor.

2.1. Să se arate că

$$x^3 y + y^3 z + z^3 x \geq xyz(x+y+z) , \qquad x, y, z > 0.$$

Căutăm pentru spargere o inegalitate de forma

$$\alpha \cdot x^3 y + \beta \cdot y^3 z + \gamma \cdot z^3 x \geq x^2 yz \quad \text{cu} \quad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Dacă o astfel de inegalitate există, atunci vom avea și

$$\alpha \cdot y^3 z + \beta \cdot z^3 x + \gamma \cdot x^3 y \geq y^2 zx \quad \text{și}$$
$$\alpha \cdot z^3 x + \beta \cdot x^3 y + \gamma \cdot y^3 z \geq z^2 xy$$

și sumând aceste inegalități obținem 2.1. Nu este artificial să cerem ca $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Această condiție este impusă și de nevoia de a avea egalitate pentru x = y = z.

Pentru găsirea unei astfel de inegalități vom folosi *inegalitatea ponderată a mediilor* :

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \geq {x_1}^{p_1} \cdot {x_2}^{p_2} \cdot \dots \cdot {x_n}^{p_n} ,$$

unde $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, $p_1, p_2, \dots, p_n$, x_1 , x_2 , ... , x_n > 0 , $n \geq 2$.

Egalitatea se obține dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Deci, conform inegalității ponderate a mediilor, dacă α, β, γ sunt nenegative cu suma 1, atunci

$$\alpha \cdot x^3 y + \beta \cdot y^3 z + \gamma \cdot z^3 x \geq (x^3 y)^{\alpha} (y^3 z)^{\beta} (z^3 x)^{\gamma} = x^{3\alpha+\gamma} y^{3\beta+\alpha} z^{3\gamma+\beta}$$

Rămâne de văzut dacă pot fi găsite α , β , γ astfel încât să avem $x^{3\alpha+\gamma} y^{3\beta+\alpha} z^{3\gamma+\beta} = x^2 yz$. Înseamnă că trebuie să avem $3\alpha + \gamma = 2$, $3\beta + \alpha = 1$, $3\gamma + \beta = 1$ dar și $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha , \beta , \gamma \geq 0$. Rezolvând sistemul format obținem α = 4/7 , β = 1/7 , γ = 2/7 . În concluzie 2.1 se sparge în

$$\frac{4}{7} \cdot x^3 y + \frac{1}{7} \cdot y^3 z + \frac{2}{7} \cdot z^3 x \geq x^2 yz$$
$$\frac{4}{7} \cdot y^3 z + \frac{1}{7} \cdot z^3 x + \frac{2}{7} \cdot x^3 y \geq y^2 zx$$
$$\frac{4}{7} \cdot z^3 x + \frac{1}{7} \cdot x^3 y + \frac{2}{7} \cdot y^3 z \geq z^2 xy$$

Prima inegalitate din spargere se verifică cu egal pentru $x^3 y = y^3 z = z^3 x \Leftrightarrow x = y = z$ caz în care și celelalte două inegalități se verifică, deci și 2.1 se verifică cu egal.

2.2. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3y+z} + \frac{1}{3z+x} \geq \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{2y+z+x} + \frac{1}{2z+x+y} , \qquad x , y , z > 0 .$$

Căutăm o inegalitate de forma

$$\frac{\alpha}{3x+y} + \frac{\beta}{3y+z} + \frac{\gamma}{3z+x} \geq \frac{1}{2x+y+z}$$

cu α + β + γ = 1. Dacă α , β , γ sunt nenegative cu suma 1 , atunci

$$\frac{\alpha}{3x+y} + \frac{\beta}{3y+z} + \frac{\gamma}{3z+x} \geq \frac{1}{\alpha(3x+y) + \beta(3y+z) + \gamma(3z+x)} = \frac{1}{(3\alpha+\gamma)x + (3\beta+\alpha)y + (3\gamma+\alpha)z}$$

Rămâne de văzut dacă există α , β , γ nenegative care să verifice sistemul 3α + γ = 2 , 3β + α = 1 , 3γ + β = 1 , α + β + γ =1. Soluția sistemului este α = 4/7, β = 1/7 , γ = 2/7, ceea ce însemnă că încercarea de spargere a reușit. Fiecare inegalitate din spargere, deci și 2.2, se verifică cu egal pentru 3x + y = 3y + z = 3z + x ⟺ x = y = z .

3. Spargeri muncitoreşti

3.1. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}, \quad a, b, c > 0.$$

Pentru inegalitatea 3.1, ca și în altele asemănătoare avem un tip special de spargere, rudă mai îndepartată a spargerii cu medii. Căutăm o inegalitate de forma :

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \alpha a + \beta b. \quad (*)$$

Cum pentru a = b = c avem egalitate în 3.1, este necesar ca pentru a = b să avem egalitate în (*). Impunând această condiție obținem $\alpha + \beta = 1/3$. Acum inegalitatea (*) capătă forma (incompletă)

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \alpha a + \left(\frac{1}{3} - \alpha\right)b \iff a^3 \geq \alpha a^3 + \frac{1}{3}a^2 b + \frac{1}{3}b^2 a + \left(\frac{1}{3} - \alpha\right)b^3 \iff$$

$$3(1-\alpha)a^3 - a^2 b - ab^2 - (1-3\alpha)b^3 \geq 0 \iff (a-b)[\,3(1-\alpha)a^2 + (2-3\alpha)ab + (1-3\alpha)b^2] \geq 0$$

Avem nevoie de $(a-b)^2$ ca factor deoarece acesta este nenegativ. Aceasta înseamnă că expresia dintre parantezele pătrate trebuie să-l conțină pe a – b factor, deci să se anuleze pentru a = b. Atunci $3(1-\alpha) + 2 - 3\alpha + 1 - 3\alpha = 0 \iff \alpha = 2/3$. În această situație inegalitatea devine

$$(a-b)(a^2-b^2) \geq 0 \iff (a-b)^2(a+b) \geq 0,$$

și se dovedește adevarată. Am stabilit astfel inegalitatea

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2a-b}{3},$$

verificată cu egal pentru a = b. Avem atunci si

$$\frac{b^3}{b^2+bc+c^2} \geq \frac{2b-c}{3} \quad \text{si} \quad \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{2c-a}{3}.$$

Adunând aceste trei inegalități obținem 3.1.

Material realizat de: Homner Dragoș Alexandru

Clasa: a XII-a

Destinat elevilor de clasa a IX-a

Bibliografie: Mihai Onucu Drimbe - *„Inegalități”* Editura GIL, 2003