

SOLUȚIE

Problema 3. Arătați că $7 \mid 3x + 5y$ dacă și numai dacă $7 \mid 5x + 6y$, oricare ar fi numerele naturale nenule x și y .

* * *

Soluție: Notăm $A = 3x + 5y$ și $B = 5x + 6y$.

Avem $2 \cdot A + 3 \cdot B = 2 \cdot (3x + 5y) + 3 \cdot (5x + 6y) = 21x + 28y = 7 \cdot (3x + 4y)$, deci $7 \mid 2 \cdot A + 3 \cdot B$.

Dacă $7 \mid A$, atunci $7 \mid 2 \cdot A$ și cum $7 \mid 2 \cdot A + 3 \cdot B$, deducem că $7 \mid 2 \cdot A + 3 \cdot B - 2 \cdot A$, adică $7 \mid 3 \cdot B$. Cum $7 \nmid 3$ obținem că $7 \mid B$.

Dacă $7 \mid B$, atunci $7 \mid 3 \cdot B$ și cum $7 \mid 2 \cdot A + 3 \cdot B$, deducem că $7 \mid 2 \cdot A + 3 \cdot B - 3 \cdot B$, adică $7 \mid 2 \cdot A$. Cum $7 \nmid 2$ obținem că $7 \mid A$.