Problema 3. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţi că dacă funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x - f(x)$ este bijectivă, atunci există $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $g(a) = a$.

Marius Perianu

Soluţie. Deoarece funcţia h este bijectivă, există un unic număr real a, astfel încât $h(a) = 0$, aşadar astfel încât $f(a) = a$. Deducem că $f(g(a)) = (f \circ g)(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(a)$, deci $h(g(a)) = g(a) - f(g(a)) = 0$. În consecinţă, $h(g(a)) = h(a) = 0$, şi cum a este unica rădăcină a funcţiei h, rezultă că $g(a) = a$.