

**PROBLEME REZOLVATE DIN GAZETA MATEMATICĂ**

ABSTRACT. Materialul conține câteva probleme rezolvate apărute în Gazeta Matematică.

Lecția se adresează clasei a IV-a

Autor: Ion Cicu, Școala nr.96, București

**Problema 1.** La împărțirea a două numere naturale câtul este cu 7 mai mare decât împărțitorul, iar restul o pătrime din cât. Aflați cele două numere naturale, știind că împărțitorul, câtul și restul fac împreună 38.

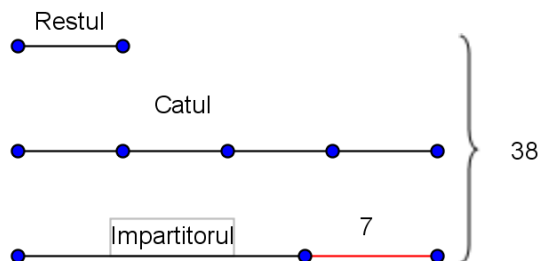
*G.M.5/2010*

**Soluție.** Vom folosi metoda figurativă.

Pentru că restul este o pătrime din cât am reprezentat mai întâi restul și apoi câtul, printr-un segment de patru ori mai mare.

Deoarece câtul este cu 7 mai mare decât împărțitorul am reprezentat împărțitorul cu 7 mai mic decât câtul.

Toate acestea se văd în desenul de mai jos.



Se observă că dacă la împărțitor adăugăm 7 vom obține un segment la fel de mare cum este câtul, așadar 9 segmente egale cu restul.

Dacă 9 resturi înseamnă 45 ( $38 + 7 = 45$ ), atunci restul va fi

$$45 : 9 = 5$$

Atunci câtul va fi

$$5 \times 4 = 20$$

iar împărțitorul

$$20 - 7 = 13$$

Cu aceasta deîmpărțitul va fi

$$20 \times 13 + 5 = 265$$

În concluzie, cele două numere sunt 265 și 13.

**Problema 2.** Găsiți toate numerele pare de forma  $\overline{abcd}$ , cu cifre distincte, știind că cifra miilor este produsul celorlalte trei cifre.

*G.M.2/2010*

**Soluție.** Din enunț trebuie să avem

$$a = b \times c \times d$$

De aici este evident că toate cifrele sunt diferite de cifra 0.

De asemenea  $b \times c \times d \leq 9$  (Să nu uităm că  $a$  este cifră)

Dacă numărul  $\overline{abcd}$  este par, atunci cifra  $d$  poate fi: 2, 4, 6 sau 8.

Dacă  $d = 2$  atunci  $b$  și  $c$  sunt mai mici decât 5 ( $2 \times 5 = 10$ )

Pentru  $b = 1$ ,  $c$  poate fi: 3 sau 4 și atunci  $a$  este 6 sau 8. Obținem numerele 6132 și 8142.

Pentru  $b = 3$  avem numai posibilitatea  $c = 1$  și atunci  $a = 6$ . Obținem numărul 6312.

Pentru  $b = 4$  avem numai  $c = 1$  și atunci  $a = 8$ . Obținem numărul 8412.

Dacă  $d = 4$  atunci  $b$  și  $c$  sunt mai mici decât 3 ( $3 \times 4 = 12$ )

Pentru  $b = 1$  avem numai  $c = 2$  și atunci  $a = 8$ . Obținem numărul 8124.

Pentru  $b = 2$  avem numai  $c = 1$  și atunci  $a = 8$ . Obținem numărul 8214.

Dacă  $d = 6$  sau  $d = 8$  atunci  $b$  și  $c$  sunt mai mici decât 1. Cum nu mai avem la dispoziție decât o cifră rezultă că aceste situații nu sunt posibile.

În concluzie, numerele sunt: 6132, 8142, 6312, 8412, 8124, 8214.

**Problema 3.** Aflați numărul natural  $\overline{ab}$ , știind că are loc egalitatea:  $a + \overline{bab} + \overline{bba} + \overline{aba} = \overline{abba}$

*G.M.2/2010*

**Soluție.** Folosind scrierea unui număr ca o sumă de produse avem

$$\begin{aligned} a + b \times 100 + a \times 10 + b + b \times 100 + b \times 10 + a + a \times 100 + b \times 10 + a = \\ = a \times 1000 + b \times 100 + b \times 10 + a \end{aligned}$$

Cu factorul comun avem

$$a \times (1 + 10 + 1 + 100 + 1) + b \times (100 + 1 + 100 + 10 + 10) = a \times (1000 + 1) + b \times (100 + 10)$$

de unde

$$a \times 113 + b \times 221 = a \times 1001 + b \times 110$$

De aici putem scrie

$$b \times 221 - b \times 110 = a \times 1001 - a \times 113$$

Folosind, din nou, factorul comun avem

$$b \times (221 - 110) = a \times (1001 - 113)$$

sau

$$b \times 111 = a \times 888$$

împărțind egalitatea prin 111 avem

$$b = 8 \times a$$

Deoarece  $a$  și  $b$  sunt cifre, singura variantă posibilă este  $a = 1$  și  $b = 8$ .

În concluzie, numărul căutat este 18.

**Problema 4.** Fie numerele naturale  $a = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2009$ ,  $b = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2010$  și  $c = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2009$ . Arătați că numerele  $a$ ,  $b + 1$  și  $c$  împărțite la 2 dau același rest.

*G.M.2/2010*

**Soluție.** Cel mai simplu este să calculăm cele trei sume și apoi să facem împărțirea.

Calculăm suma  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2009$ .

Sunt 2009 termeni. Lăsând de-o parte numărul 2009 rămânem cu 2008 termeni care se pot grupa câte doi în 1004 grupe. Vom grupa astfel: 1 cu 2008, 2 cu 2007, 3 cu 2006 și așa mai departe. În fiecare grupă suma este 2009. Atunci

$$a = 1004 \times 2009 + 2009 = 2019045$$

**Comentariu.** Suma  $a = 1 + 2 + 3 + \dots + 2007 + 2008 + 2009$  se poate calcula și altfel.

Putem așeza suma în două feluri, ca mai jos.

$$\begin{array}{r} a = 1 + 2 + 3 + \dots + 2007 + 2008 + 2009 \\ a = 2009 + 2008 + 2007 + \dots + 3 + 2 + 1 \end{array}$$

Observând că numerele așezate unul sub altul au suma 2010 putem spune că de două ori  $a$  înseamnă de 2009 ori 2010.

Adică

$$2 \times a = 2009 \times 2010$$

de unde

$$a = 2009 \times 2010 : 2$$

În general,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n \times (n + 1) : 2$$

Revenim la problemă și calculăm  $b$ . Folosind factorul comun avem

$$b = 2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 1005)$$

și din comentariu de mai sus avem

$$b = 2 \times 1005 \times (1005 + 1) : 2 = 1011030$$

Pentru a calcula  $c$  să observăm că termenii lui  $c$  sunt numere impare. Dacă am fi avut și numerele pare aveam chiar  $a$ . Această observație ne permite să-l scriem pe  $c$  astfel

$$c = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2008 + 2009 - (2 + 4 + \dots + 2008)$$

de unde

$$c = 2019045 - 1009020 = 1010025$$

Așadar  $a = 2019045$ ,  $b = 1011030$ ,  $c = 1010025$ .

Atunci  $a : 2$  dă câtul 1009522 și restul 1.

$(b + 1) : 2$  dă câtul 505515 și restul 1.

$c : 2$  dă câtul 505012 și restul 1.

Adică  $a$ ,  $b + 1$  și  $c$  dau același rest la împărțirea la 2.

**Problema 5.** Dacă  $3 \times a + b = 11$  și  $2 \times b - c = 8$ , calculați  $6 \times a + 8 \times b - 3 \times c$ .  
*G.M.1/2010*

**Soluție.** Avem relațiile

$$3 \times a + b = 11 \quad (*)$$

$$2 \times b - c = 8 \quad (**)$$

din care trebuie să aflăm

$$6 \times a + 8 \times b - 3 \times c \quad (***)$$

În relația (\*\*\*) avem  $6 \times a$ , iar în relația (\*) avem  $3 \times a$ . de asemenea, în relația (\*\*\*) avem  $3 \times c$ , iar în relația (\*\*) avem numai  $c$ . Aceste observații ne îndeamnă să înmulțim relația (\*) cu 2 și relația (\*\*) cu 3, apoi să le adunăm. Avem

$$6 \times a + 2 \times b = 22 \quad (** **)$$

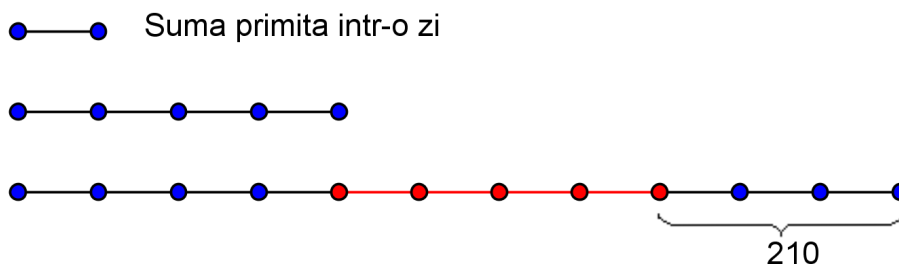
$$6 \times b - 3 \times c = 24 \quad (** ** *)$$

Adunând cele două relații și ținând cont de faptul că  $2 \times b + 6 \times b = 8 \times b$  obținem

$$6 \times a + 8 \times b - 3 \times c = 46$$

**Problema 6.** Un muncitor lucrează 4 zile, iar altul lucrează 11 zile. Împărțind suma de bani primită de al doilea muncitor la suma de bani primită de primul muncitor obținem restul 210. Ce sumă de bani a primit fiecare știind că pentru fiecare zi lucrată cei doi muncitori au primit sume egale de bani?  
*G.M.1/2010*

**Soluție.** Cheia problemei o reprezintă afirmația **pentru fiecare zi lucrată cei doi muncitori au primit sume egale de bani**. Dacă vom reprezenta suma primită pentru o zi printr-un segment, atunci problema poate fi figurată astfel



Se observă că suma primită de primul muncitor se reprezintă prin 4 segmente, iar suma primită de al doilea muncitor prin 11 segmente.

Afirmația **împărțind suma de bani primită de al doilea muncitor la suma de bani primită de primul muncitor obținem restul 210** o interpretăm pe desen astfel: trei segmente înseamnă 210.

## ARITMETICĂ

5

Atunci, un segment, adică suma primită pentru o zi înseamnă

$$210 : 3 = 70 \text{ (lei)}$$

De aici, primul muncitor primește

$$70 \times 4 = 280 \text{ (lei)}$$

iar cel de-al doilea

$$70 \times 11 = 770 \text{ (lei)}$$