Problemă. Arătaţi că numărul

$$S = 1 + (3^2 - 2^2) + (3^3 - 2^3) + ... + (3^{2011} - 2^{2011})$$

este divizibil cu 5.

Răzvan Ceuca, student, Iaşi

Soluţie Relaţia

$$S = (3 - 2) + (3^2 - 2^2) + (3^3 - 2^3) + ... + (3^{2011} - 2^{2011})$$

se poate scrie

$$S = (3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{2011}) - (2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2011})$$

sau

$$S = (1+3+3^2+3^3+...+3^{2011}) - (1+2+2^2+2^3+...+2^{2011})$$

Vom arăta acum, că fiecare dintre paranteze este divizibilă cu 5.

În suma

$$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{2011}$$

sunt 2012 termeni.

Obsevând că $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 40 = \mathcal{M}5$ putem scrie

$$A = (1+3+3^2+3^3)+3^4\cdot(1+3+3^2+3^3)+...+3^{2008}\cdot(1+3+3^2+3^3),$$

de unde

$$A = \mathcal{M}5 + 3^4 \cdot \mathcal{M}5 + ... + 3^{2008} \cdot \mathcal{M}5 = \mathcal{M}5.$$

Analog obţinem

$$B = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2011} = \mathcal{M}5.$$

Rezultă atunci că

$$S = A - B = \mathcal{M}5.$$