Problema 4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Considerăm un tablou cu n linii și n coloane, format din celule 1×1. O secvență de celule ale tabloului se numește *scară* dacă îndeplinește următoarele condiții:

- ✓ prima celulă din secvență este situată pe primul rând (cel de sus) al tabloului;
- ✓ ultima celulă din secvență este situată pe ultimul rând (cel de jos) al tabloului;
- ✓ începând cu a doua, oricare celulă din secvență are o latură comună cu precedenta și este situată la dreapta sau dedesubtul acesteia.

Pentru a obține o *configurație* de alune, o veveriță își alege o scară și depune în fiecare celulă a acesteia un număr natural de alune astfel încât, dacă parcurgem scara de la prima la ultima celulă a sa, șirul cantităților de alune începe cu 1, este strict crescător și toți termenii săi sunt cel mult egali cu $2n$.

Câte configurații de alune poate genera veverița?

În figura de mai jos aveți exemplificate patru configurații posibile pentru un tablou 4×4.

1	3		
	4		
	5	6	7
			8

	1		
	2		
	4		
	6	7	

	1		
	4		
	5		
	7	8	

	1		
	3		
	5		
	7		

***

Soluție.

Considerăm o scară S care începe din celula $(1, x)$ și se termină în celula (n, y), unde $1 \leq x \leq y \leq n$. Dacă fixăm numărul $k = y - x \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, observăm că avem $n-k$ posibilități de alegere a lui x, apoi y este unic determinat de $y = x + k$.

Scara S este o succesiune de pași în jos(sau la dreapta), apoi, eventual, o succesiune de pași la dreapta (respectiv în jos); urmează, eventual, o nouă succesiune de pași în jos(sau la dreapta) și așa mai departe. La fiecare pas trecem din celula (a, b) în celula $(a+1, b)$ atunci când ne deplasăm în jos, respectiv din celula (a, b) în celula $(a, b+1)$ atunci când ne deplasăm la dreapta. La fiecare pas făcut din celula (a, b) în următoarea, cantitatea $a+b$ crește cu exact o unitate. Atunci numărul de pași va fi $(n+y)-(1+x) = n-1+k$, iar numărul celulelor parcurse va fi $n+k$.

Numărul de alegeri pentru celulele scării este egal cu numărul de moduri în care putem alege cei k pași ce trebuie făcuți la dreapta din totalul celor $n-1+k$ pași, adică C_{n+k-1}^{k}. Apoi, pentru fiecare astfel de mulțime de celule, numărul de moduri în care veverița poate depune alune astfel încât să obțină un șir strict crescător de cantități din mulțimea $\{1,2,\ldots,2n\}$ este C_{2n-1}^{n+k-1} (primul 1 este obligatoriu).

Așadar, pentru k fixat, avem $a_k=(n-k)\cdot C_{n+k-1}^{k}\cdot C_{2n-1}^{n+k-1}=\frac{(2n-1)!}{((n-1)!)^2}\cdot C_{n-1}^{k}$ configurații.

Sumând pentru $k=0,1,\ldots,n-1$, obținem numărul total de configurații (notat s_n) și anume

$$s_n=\frac{(2n-1)!}{((n-1)!)^2}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}=\frac{(2n-1)!}{((n-1)!)^2}\cdot 2^{n-1}.$$