

Problema 2, etapa 7

-1-

Un client a observat că la magazinul din cartier, prețul unui obiect a crescut cu $a\%$ apoi cu $b\%$, după care a scăzut cu $c\%$, ajungând la prețul inițial. Determinați cele trei procente știind că sunt numere naturale nenule nici mici decât 100.

* **

Soluție:

Notăm cu x prețul inițial. După majorarea cu $a\%$, prețul obiectului devine:

$$x + \frac{a \cdot x}{100} = \frac{100x + ax}{100} = \frac{x(100+a)}{100}$$

Acest preț se majorază cu $b\%$:

$$\frac{x(100+a)}{100} \cdot \frac{b}{100} = \frac{xb(100+a)}{100^2}$$

Atunci după a doua majorare prețul devine:

$$\frac{x(100+a)}{100} + \frac{xb(100+a)}{100^2} = \frac{100x(100+a) + xb(100+a)}{100^2} =$$

$$= \frac{100x(100+a) + xb(100+a)}{100^2} = \frac{x(100+a)(100+b)}{100^2}$$

Acest preț scade cu $c\%$, adică

$$\frac{x(100+a)(100+b)}{100^2} \cdot \frac{c}{100} = \frac{xc(100+a)(100+b)}{100^3}$$

Prețul după scădere devine:

$$\frac{x(100+a)(100+b)}{100^2} - \frac{xc(100+a)(100+b)}{100^3} =$$

$$= \frac{100x(100+a)(100+b) - xc(100+a)(100+b)}{100^3} =$$

$$= \frac{x(100+a)(100+b)(100-c)}{100^3}. \text{ După scădere, prețul}$$

devine prețul inițial. Deci:

$$\frac{x(100+a)(100+b)(100-c)}{100^3} = x$$

$$x(100+a)(100+b)(100-c) = 100^3 x \quad | :x$$

①

$$(100+a)(100+b)(100-c)^{-2} = 100^3 = 2^6 \cdot 5^6$$

a, b și c sunt mai mici decât 100 și mai mari ca 0.

Presupunem că fiecare dintre cele 3 paranteze îl conține pe 5^2 și nu-l conține pe 5^3 .

Considerăm că $100+a$ conține pe $5^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 100+a = M25$$

Cum $100 < 100+a < 200$

$$\text{Avenim: } 100+a \in \{125, 150, 175\}$$

Dacă $100+a = 125 = 5^3$ Contradicție cu presupunerea făcută.

Dacă $100+a = 150 = 3 \cdot 50 : 3$ Contradicție cu $2^6 \cdot 5^6 \not\div 3$

Dacă $100+a = 175 : 7$ dar $2^6 \cdot 5^6 \not\div 7$ Deci presupunerea

făcută este falsă. Atunci există o paranteză care-l conține pe 5^3 . Aceasta poate fi $100+a$ sau $100+b$.

Considerăm $100+a$ conține pe 5^3 } \Rightarrow
 $100 < 100+a < 200$

$$\Rightarrow 100+a = 125 \Rightarrow \boxed{a = 25}$$

Înlocuim pe a și avem:

$$5^3 (100+b)(100-c) = 5^6 \cdot 2^6 \mid : 5^3$$

$$(100+b)(100-c) = 5^3 \cdot 2^6$$

Avem următoarele posibilități:

$$\text{Caz I : } 100+b : 5 \text{ și } 100-c : 5^2$$

$$\text{Caz II : } 100+b : 5^2 \text{ și } 100-c : 5$$

$$\text{Caz III : } 100+b : 5^3 \text{ și } 100-c \text{ nu conține pe } 5.$$

$$\text{Caz I: } 100 - c : 5^2 \quad -3-$$

$$\text{cum } 100 - c < 100 \Rightarrow 100 - c \in \{25, 50, 75\}$$

$100 - c = 75$ nu este soluție pentru că $75 \div 3$,
iar $2^6 \cdot 5^6 \not\div 3$.

$$\text{Rămâne } 100 - c \in \{25, 50\}$$

$$\text{Dacă } 100 - c = 25$$

$$(100 + b) \cdot 25 = 2^6 \cdot 5^3$$

$$100 + b = 2^6 \cdot 5 = 64 \cdot 5 = 320 \quad \text{Contradicție cu}$$
$$100 + b < 200$$

$$\text{Rămâne } 100 - c = 50$$

$$50(100 + b) = 2^6 \cdot 5^3$$

$$100 + b = \frac{2^6 \cdot 5^3}{50} = 2^5 \cdot 5 = 32 \cdot 5 = 160$$

$$\text{Deci } b = 60 \text{ și } c = 100 - 50 = 50$$

$$\text{Deci o soluție este } \boxed{\begin{array}{l} a = 25 \\ b = 60 \\ c = 50 \end{array}}$$

$$\text{Caz II: } 100 + b : 5^2$$

$$100 + b \in \{125, 150, 175\}$$

$100 + b = 150$ și 175 nu satisfac pentru că sunt
divizibile cu 3.

Deci $100 + b = 125$ (ne ocupăm la cazul III).

$$\text{Caz III: } 100 + b : 5^3$$

$$100 + b = 125 \Rightarrow b = 25 \Rightarrow (100 - c) = 125 =$$
$$= 2^6 \cdot 5^3$$

$$100 - c = 2^6 \Rightarrow c = 36$$

Deci alte soluții este:

$$\begin{cases} a = 25 \\ b = 25 \\ c = 36 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Deci } 100 + b = 5^3 &\Rightarrow b = 25 \\ a &= 60 \\ c &= 50 \end{aligned}$$

Deci soluțiile sunt:

$$\begin{cases} a = 25 \\ b = 25 \\ c = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 25 \\ b = 60 \\ c = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 60 \\ b = 25 \\ c = 50 \end{cases}$$

Băbtoi Teodor
C.N. „Roman-Vodă”
Roman, Cleant.