Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a X-a

Problema 1. Notăm cu A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB ale triunghiului ascuţitunghic ABC. Demonstraţi că

$$HA_1 + HB_1 + HC_1 \leqslant r + R + OH.$$

Notaţiile sunt cele uzuale, adică:
$H =$ ortocentrul triunghiului ABC;
$O =$ centrul cercului circumscris triunghiului ABC;
$R =$ raza cercului circumscris triunghiului ABC;
$r =$ raza cercului înscris în triunghiul ABC.

VO 2022, etapa 7

Soluţie: Vom lucra în planul complex raportat la un reper cartezian cu originea în O. Notăm cu x,y şi z afixele punctelor A,B, respectiv C. Atunci punctul H are afixul $x + y + z$ (Sylvester).

Evident $HA = |y + z|$, $HB = |x + z|$, $HC = |x + y|$ şi $OH = |x + y + z|$.

Cum A_1 este mijlocul lui BC, rezultă că punctul A_1 are afixul $\dfrac{y+z}{2}$ şi atunci avem $HA_1 = \left|(x+y+z) - \dfrac{y+z}{2}\right|$, iar de aici deducem că $2HA_1 = |2x + y + z|$. Analog obţinem $2HB_1 = |x + 2y + z|$ şi $2HC_1 = |x + y + 2z|$.

Aplicând inegalitatea lui Hlawka,

$$|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|$$

pentru numerele complexe $z_1 = x + z$, $z_2 = x + y$ şi $z_3 = y + z$, obţinem:

$$|2x + y + z| + |x + 2y + z| + |x + y + 2z| \leqslant |x + y| + |y + z| + |z + x| + 2|x + y + z|,$$

adică

$$2\left(HA_1 + HB_1 + HC_1\right) \leqslant AH + BH + CH + 2OH \qquad (1)$$

Cum $AH + BH + CH = 2R(\cos A + \cos B + \cos C) = 2R\left(1 + \dfrac{r}{R}\right) = 2(R + r)$, din (1) rezultă inegalitatea cerută.

Barem:

Ideea de a lucra în planul complex şi relaţia lui Sylvester **1p**
$HA = |y + z|$, $2HA_1 = |2x + y + z|$ şi analoagele **2p**
Aplicarea inegalităţii lui Hlawka şi obţinerea inegalităţii (1) **2p**
Finalizare **2p**