

Problema 1. În fiecare pătrățel al unei table 10×10 este scris câte un număr real. Emilia a calculat toate produsele de două numere scrise în pătrățele diferite ale tablei și a constatat că exact 1000 dintre aceste produse erau negative. De câte ori apare numărul 0 printre numerele cu care era completată tabla? Găsiți toate răspunsurile posibile.

Concursul Náboj, Cehia și Slovacia, 2011

Soluție:

Dacă notăm cu p , n numărul de numere pozitive, respectiv negative din pătrățelele tablei, avem că $0 \leq p \leq 100$ și $0 \leq n \leq 100$ (sunt $10 \times 10 = 100$ de numere în tabel). De asemenea trebuie ca $n + p \leq 100$, diferența $100 - n - p$ reprezentând numărul, căutat, de numere egale cu 0 aflate în tabel. Produse negative se obțin numai înmulțind un număr pozitiv cu unul negativ, așadar avem $n \cdot p = 1000$. Analizând posibilitățile, găsim variantele $\{n, p\} = \{10, 100\}$, $\{n, p\} = \{20, 50\}$ și $\{n, p\} = \{25, 40\}$. Prima variantă nu respectă $n + p \leq 100$. Rămân celelalte două, pentru care numărul de zerouri este $100 - 20 - 50 = 30$, respectiv $100 - 25 - 40 = 35$. Se verifică ușor că ambele variante sunt într-adevăr posibile. Așadar numărul de zerouri poate fi 30 sau 35.