Problema 2

Fie 2023 puncte în spațiu astfel încât să nu existe trei coliniare. Ele sunt împărțite în 4 grupuri astfel încât numerele de elemente din oricare două grupuri să fie distincte. Se formează apoi triunghiuri unind, în toate modurile posibile, câte trei puncte din trei grupuri diferite. Găsiți numărul de elemente din fiecare grup astfel încât numărul acestor triunghiuri să fie maxim.

Soluție.

Fie n_1, n_2, n_3, n_4 numerele de puncte ale celor patru grupuri. n_1, n_2, n_3, n_4 sunt distincte, suma lor este $n_1 + n_2 + n_3 + \ n_4 = 2023$ și numărul de triungiuri care se pot forma este $S = n_1n_2n_3 + n_1n_2n_4 + n_1n_3n_4 + n_2n_3n_4$. Din moment ce numărul de moduri în care se pot împărți cele 2023 puncte este finit, există un maxim al lui *S*. Fără a restrânge generalitatea, să presupunem că $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$. Vom demonstra că dacă *S* este maxim, atunci sunt îndeplinite următoarele condiții:

(1) $n_{k+1} - n_k \leq 2 \ (k = 1,2,3)$. Într-adevăr, dacă ar exista o pereche n_k, n_{k+1} astfel încât $n_{k+1} - n_k \geq 3$, alegând $n'_k = n_k + 1$ și $n'_{k+1} = n_{k+1} - 1$, n'_{k+1} încă ar fi mai mare decât n'_k, dar numărul de triunghiuri care se pot forma, *S'* , ar fi mai mare decât *S*, ceea ce contrazice maximalitatea lui *S*. Demonstrăm pentru $k = 1$, celelalte cazuri fiind similare:

$$S' - S =$$
$$(n'_1n'_2n_3 + n'_1n'_2n_4 + n'_1n_3n_4 + n'_2n_3n_4) - (n_1n_2n_3 + n_1n_2n_4 + n_1n_3n_4 + n_2n_3n_4) =$$
$$(n'_1n'_2 - n_1n_2)(n_3 + n_4) + n_3n_4(n'_1 + n'_2 - n_1 - n_2).$$

Dar $n'_1 + n'_2 = n_1 + n_2$, de unde $S' - S = [n_2 - (n_1 + 1)](n_3 + n_4) > 0$.

(2) Există cel mult un indice k pentru care $n_{k+1} - n_k = 2$. Într-adevăr, dacă ar exista doi indici $a, b, a < b,$ astfel încât $n_{a+1} - n_a = 2$ și $n_{b+1} - n_b = 2$, atunci luând $n'_a = n_a + 1$ și $n'_b = n_b - 1$, s-ar obține, din nou, asemănător, un *S* mai mare.

Cu condițiile (1) și (2) deducem că diferențele dintre n_1, n_2, n_3, n_4 sunt 1, cu cel mult o excepție, cand diferența poate fi 2. Cum suma a patru numere consecutive nu poate fi 2023 ($n_1 + n_1 + 1 + n_1 + 2 + n_1 + 3 = 4n_1 + 6 \neq 2023$), aflăm cel mai mare număr încă mai mic decât 2023 care se poate scrie astfel, adică 2022=504+505+506+507, iar diferența 2023-2022=1 ne va indica și câte numere trebuie mărite cu 1 pentru ca o singură diferență să fie 2. Soluția problemei este, așadar, 504, 505, 506, 508.