

PRINCIPIUL CUTIEI

ABSTRACT. În articolul de față este prezentat principiul cutiei și sunt rezolvate câteva probleme cu ajutorul acestui principiu.

Lecția se adresează clasei a V-a

Data: ianuarie 2011

Autor: Ion Cicu, Profesor, Școala nr. 96, București

Acest principiu este mai mult o observație de bun simț care, de-a lungul timpului s-a dovedit foarte utilă în rezolvarea unor probleme.

Se pare că pentru prima oară a fost utilizat de către matematicianul german Dirichlet. Din acest motiv i se mai spune și principiul lui Dirichlet.

Dar care este acest principiu?

Mai întâi un mic exemplu.

Dacă aveți trei mere pe care trebuie să le puneți în două coșuri, atunci va trebui ca într-un coș să puneți două mere.

Despre aceasta este vorba; dacă am mai multe obiecte de așezat în mai puține cutii, atunci într-o cutie trebuie să așez mai multe obiecte.

Iată însă cum se enunță acest principiu la modul general:

Dacă avem un număr N de cutii și un număr $N + 1$ de obiecte, atunci cel puțin într-o cutie vor fi două obiecte.

Să numerotăm cutiile cu

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_N$$

și obiectele cu

$$O_1, O_2, O_3, \dots, O_N, O_{N+1}.$$

Să presupunem că în cutia C_1 se află obiectul O_1 , în cutia C_2 obiectul O_2 și așa mai departe, în cutia C_N se află obiectul O_N . În acest fel am terminat cutiile, dar ne-a mai rămas un obiect. Ce facem cu el? Îl introducem într-o cutie unde se mai află deja un obiect. Așadar, într-o cutie se vor afla două obiecte.

Prezentăm acum câteva exemple. Începem cu o problemă foarte simplă, dar utilă pentru a înțelege mecanismul după care funcționează principiul cutiei.

Problema 1: Din trei numere naturale luate la întâmplare, cel puțin două au aceeași paritate.

Soluție: Numerele naturale pot fi pare sau impare. Acestea sunt cutiile; o cutie pentru numere pare și o cutie pentru numere impare. Obiectele sunt cele trei numere. Așadar avem două cutii și trei obiecte. Conform principiului cutiei, într-o cutie sunt cel puțin două obiecte. În concluzie, cel puțin două numere au aceeași paritate.

Problema 2: Dacă a , b , c sunt trei numere naturale, atunci unul dintre numerele $a + b$, $b + c$, $c + a$ este par.

Soluție: Se știe că suma a două numere de aceeași paritate este un număr par. În problemă avem trei numere și conform problemei 1 cel puțin două dintre ele au aceeași paritate. În concluzie, cel puțin unul dintre numerele $a + b$, $b + c$, $c + a$ este număr par.

Problema 3: O echipă de fotbal este formată din 11 jucători și 2 rezerve. Arătați că există cel puțin doi jucători născuți în aceeași lună.

Soluție: Un an are 12 luni. Acestea vor fi cutiile. Jucătorii, cu rezerve cu tot, reprezintă obiectele, iar numărul lor este 13. Conform principiului cutiei (avem mai multe obiecte decât cutii), într-o cutie vor fi cel puțin două obiecte. Așadar, avem cel puțin doi jucători născuți în aceeași lună.

Problema 4: Demonstrați că dintre oricare 7 numere naturale există două a căror diferență se împarte exact la 6 (se divide cu 6).

Soluție: Prin împărțirea unui număr natural la 6 putem obține unul dintre resturile: 0, 1, 2, 3, 4 sau 5. Resturile vor reprezenta cutiile, iar cele 7 numere sunt obiectele. Așadar, avem mai multe obiecte (7) decât cutii (6). Conform principiului cutiei, într-o cutie avem cel puțin două obiecte. Asta înseamnă că avem cel puțin două numere care să dea același rest la împărțirea la 6.

Dacă numerele sunt a și b , $a > b$ avem

$$a = 6 \cdot n + r$$

și

$$b = 6 \cdot p + r$$

Diferența acestor numere este

$$a - b = 6 \cdot n - 6 \cdot p = 6 \cdot (n - p)$$

care se împarte exact la 6.

Problema 5: La o lucrare de matematică, cei 25 de elevi ai unei clase au luat note de la 5 la 10, inclusiv. Arătați că există cel puțin 5 elevi care au luat aceeași notă.

Soluție: Elevii puteau obține notele: 5, 6, 7, 8, 9 sau 10. Acestea vor fi cutiile; în total 6 cutii. Obiectele sunt reprezentate de cei 25 de elevi. Dacă în fiecare cutie vom pune câte 4 obiecte înseamnă că am folosit

$$6 \times 4 = 24 \quad (\text{obiecte})$$

Dar erau 25 de elevi (adică de obiecte), așadar într-o cutie vor fi 5 obiecte (elevi). În concluzie, cel puțin 5 elevi au obținut aceeași notă.

Problema 6: Într-o cameră sunt 30 de persoane. Arătați că există două persoane cu același număr de cunoștințe în acea cameră.

Soluție: O persoană poate avea 0, 1, 2, până la 29 de cunoștințe. Acestea sunt cutiile și sunt 30. Dar cutiile 0 și 29 nu pot fi ocupate în același timp (Dacă o persoană nu are nicio cunoștință, atunci nu putem avea o persoană cu 29 de cunoștințe; dacă o persoană cunoaște pe toată lumea nu putem avea o persoană care să spună că nu cunoaște pe nimeni). Atunci rămân 29 de cutii și 30 de persoane. Așadar, într-o cutie sunt două persoane

Problema 7: Arătați că numărul 2011 are un multiplu de forma 1111...11.

Soluție: Considerăm numerele 1, 11, 111, ..., $\underbrace{111\dots11}_{\text{de } 2012 \text{ ori}}$. Avem 2012 numere pe care, dacă le împărțim la 2011 obținem $\underbrace{2011}_{\text{de } 2012 \text{ ori}}$ resturi. Având în vedere problema 4 putem spune că există cel puțin două numere care dau același rest prin împărțire la 2011. Atunci diferența lor (vezi tot problema 4) se împarte exact la 2011 sau altfel spus, diferența lor este multiplu de 2011. Fie $\underbrace{111\dots11}_{n \text{ ori}}$ și $\underbrace{111\dots11}_{p \text{ ori}}$ cu $n > p$ cele două numere care dau același rest la împărțirea la 2011. Diferența lor este

$$\underbrace{111\dots11}_{n \text{ ori}} - \underbrace{111\dots11}_{p \text{ ori}} = \underbrace{111\dots11}_{n-p \text{ ori}} \underbrace{000\dots0}_{p \text{ ori}}$$

Dar

$$\underbrace{111\dots11}_{n-p \text{ ori}} \underbrace{000\dots0}_{p \text{ ori}} = \underbrace{111\dots11}_{n-p \text{ ori}} \cdot \underbrace{1000\dots0}_{p \text{ ori}}$$

Cum $\underbrace{1000\dots0}_{p \text{ ori}}$ nu este multiplu al lui 2011 rezultă că $\underbrace{111\dots11}_{n-p \text{ ori}}$ este multiplu al lui 2011.