Etapa 5, Problema 2

Fie A o mulțime cu 225 de elemente și $A_1, A_2, ..., A_{11}$ submulțimi distincte ale mulțimii A astfel încât $Card\, A_i = 45$ pentru $i \in \{1, 2, 3, ..., 11\}$ și $Card(A_i \cap A_j) = 9$ pentru $1 \le i < j \le 11$. Demonstrați inegalitatea $Card(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{11}) \ge 165$.

Soluție.

Fără a pierde generalitatea, putem presupune egalitatea $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{11} = \{1, 2, ..., n-1, n\}$; demonstrăm că $n \ge 165$.

Pentru fiecare $i \in \{1, 2, ..., n\}$, definim numerele e_{ij} prin relația

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & dacă \;\; e_{ij} \in A_j \\ 0, & dacă \;\; e_{ij} \notin A_j \end{cases}, \text{ unde } j \in \{1, 2, ..., 11\}.$$

Atunci

$$495 = 11 \cdot 45 = \sum_{j=1}^{11} Card(A_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{11} e_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{11} e_{ij}^2.$$

Dar

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{11} e_{ij} \right)^2 \le n \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{11} e_{ij} \right)^2 = n \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{11} e_{ij}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{1 \le j < k \le 11} e_{ij} e_{ik} \right) =$$

$$= n \left(495 + 2 \sum_{1 \le j < k \le 11} Card(A_j \cap A_k) \right) = n(495 + 2 \cdot 9 \cdot C_{11}^2) = 1485n.$$

Rezultă, astfel, că

$$n \ge \frac{495^2}{1485} = 165.$$