

Concursul “Stelele Matematicii” 2013

★ ★ ★

Sâmbătă, 19 octombrie 2013, orele 09:30

★ ★ ★

Liceul Internațional de Informatică București

★ ★ ★

Proba Juniori

Problema 1. Demonstrați că pentru orice numere întregi a, b , ecuația

$$2abx^4 - a^2x^2 - b^2 - 1 = 0$$

nu poate avea nicio rădăcină număr întreg.

Problema 2. Trei puncte sunt luate în interiorul unui dreptunghi; un al patrulea punct este luat în interiorul triunghiului determinat de ele. Demonstrați că cel puțin unul dintre cele trei patrulatere concave formate de aceste patru puncte are perimetrul mai mic decât cel al dreptunghiului.

Problema 3. Fie șirul $(3^{2^n} + 1)_{n \geq 1}$.

i) Demonstrați că există infinit de multe numere prime, niciunul fiind un divizor al vreunui termen al șirului.

ii) Demonstrați că există infinit de multe numere prime, fiecare fiind un divizor al măcar unui termen al șirului.

Problema 4. O mulțime S de celule ale unui tablou de dimensiuni $n \times n$, $n \geq 2$, se zice a fi *plină* dacă fiecare linie și fiecare coloană ale tabloului conțin cel puțin un element din S , dar care nu mai are această proprietate când oricare dintre elementele sale este eliminat. O mulțime plină de cardinalitate maximă se zice a fi *grasă*, în timp ce o mulțime plină de cardinalitate minimă se zice a fi *slabă*.

i) Determinați cardinalitatea $m(n)$ a mulțimilor slabe, descrieți toate mulțimile slabe și calculați numărul lor.

ii) Determinați cardinalitatea $M(n)$ a mulțimilor grase, descrieți toate mulțimile grase și calculați numărul lor.

Orice cerere de clarificare poate fi făcută oricând pe parcursul probei. Este permisă folosirea calculatoarelor de buzunar, dar nu conectarea la Internet. Timp de lucru $4\frac{1}{2}$ ore. Fiecare problemă valorează **10** puncte.

Problemele nu sunt prezentate în mod necesar în ordinea dificultății; niciuna nu este trivială. Concizia și claritatea redactării vor fi luate în considerație. Încercați să nu folosiți mai mult de o coală de hârtie pentru fiecare problemă. Ciornele nu se remit. Contestațiile se rezolvă în direct cu comisia problemei.

★ ★ ★ **Mult SUCCES tuturor participanților!**