Problema 2

Determină valorile întregi ale numărului x care verifică egalitatea:

$$\frac{x^2+2}{2x+1}+\frac{x^2+4}{2x+3}+\frac{x^2+6}{2x+5}+\cdots+\frac{x^2+4048}{2x+4047} = 2024.$$

(Gazeta Matematică)

Soluție.

$$\sum_{k=1}^{2024}\left(\frac{x^2+k+1}{2x+k}-1\right)=0$$

Sau

$$\sum_{k=1}^{2024}\left(\frac{x^2-2x+1}{2x+k}\right)=0$$

Sau

$$\sum_{k=1}^{2024}\frac{(x-1)^2}{2x+k}=0$$

Sau

$$(x-1)^2\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{2x+k}=0$$

Avem în primul caz $(x-1)^2=0$, cu soluția x = 1.

Vom arăta că pentru x natural diferit de 1 al doilea factor $\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{2x+k}$ este diferit de zero.

Dacă x> 1 numitorii sunt strict pozitivi, deci $\sum_{k=1}^{2024}\frac{1}{2x+k}$ nu poate fi nul. Dacă x =0 nu se verifică ecuația.Pentru x negativ, suma are 2024 termeni, deci putem să grupăm primul termen al sumei cu ultimul, al doilea cu penultimul, s.a.m.d, iar după ampligicare în fiecare grupă obținem la numitorii celor 1012 fracții aceeași expresie: 4x + 4048 care produce soluția -1012. După împărțirea cu 4x + 4048 obținem o sumă de 1012 fracții ce pot fi grupate dinou prima cu ultima , a doua cu penultima, ș.a.m.d. iar după amplificare se obține aceeași expresie la numărător $8x^2+4x\cdot 4048+2024^2+4048-2$, la cele 506 fracții. Evident un multiplu de 4 minus2 nu poate fi nul. La eventuala împărțire cu expresia $8x^2 + 4x\cdot 4048 + 2024^2 + 4048 -2$, se obține o sumă de 253 fracții cu numitorii produse de numere întregi impare. În eventualitatea aducerii la acelați numitor se obține la numărător o sumă de termini impair în număr impar, deci nu poate fi nulă. Astfel singurele soluții ale ecuației sunt 1 și -1002.