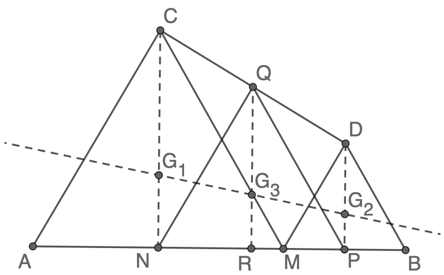
Problema 4
Etapa 2
Clasa a VII-a

Problema 4. Fie AB un segment şi M un punct arbitrar aflat în interiorul segmentului AB. Se construiesc pe aceeaşi parte a segmentului AB triunghiurile echilaterale AMC şi MBD. Fie N, P şi Q mijloacele segmentelor AM, MB, respectiv CD. Arătaţi că centrele de greutate ale triughiurilor AMC, MBD şi NQP sunt coliniare.

Constantin Cocea

Soluţie



Întâi, arătăm că triunghiul NPQ este echilateral.

$\sphericalangle CAM = \sphericalangle DMB$, deci $MD || AC$. Atunci $AMDC$ este trapez, iar NQ este linie mijlocie.

$NQ = \frac{AC+MD}{2}$ şi $NQ||AC$, deci $\sphericalangle QNP = 60°$. (1)

Analog, $CMBD$ trapez şi $QP = \frac{DB+CM}{2}$. Cum $\triangle ACM, \triangle MDB$ sunt echilaterale, $NQ = QP$. (2)

Din (1) şi (2), $\triangle NPQ$ este echilateral.

Fie R punctul de intersecţie al dreptei AB cu înălţimea triunghiului NPQ dusă din Q. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AMC, MBD, respectiv NQP. $\triangle NPQ$ echilateral $\Rightarrow G_3 \in RQ$.

În plus, $\frac{G_1N}{NC} = \frac{G_3R}{RQ} = \frac{G_2P}{PD} = \frac{1}{3}$.

$CN = \frac{\sqrt{3}}{2}AC, QR = \frac{\sqrt{3}}{2}NQ, DP = \frac{\sqrt{3}}{2}MD$

$NQ = \frac{AC+MD}{2} \Rightarrow RQ = \frac{NC+PD}{2} \Rightarrow RG_3 = \frac{NG_1+PG_2}{2}$.

Atunci RG_3 este linie mijlocie în trapezul NPG_2G_1, deci G_1, G_2 şi G_3 sunt coliniare.