

Problemă. Demonstrați identitatea

$$\left[x + \frac{1}{6} \right] + \left[x + \frac{5}{6} \right] = [6x] - [3x] - [2x] + [x]$$

* * *

Soluție. Folosim egalitatea lui Hermite:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \left[x + \frac{2}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx]$$

pentru orice x număr real și n număr natural nenul.

Avem

$$[x] + \left[x + \frac{1}{6} \right] + \left[x + \frac{2}{6} \right] + \left[x + \frac{3}{6} \right] + \left[x + \frac{4}{6} \right] + \left[x + \frac{5}{6} \right] = [6x]$$

$$[x] + \left[x + \frac{1}{3} \right] + \left[x + \frac{2}{3} \right] = [3x]$$

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x].$$

Scăzând din prima relație pe următoarele două obținem

$$[6x] - [3x] - [2x] = \left[x + \frac{1}{6} \right] + \left[x + \frac{5}{6} \right] - [x]$$

de unde

$$\left[x + \frac{1}{6} \right] + \left[x + \frac{5}{6} \right] = [6x] - [3x] - [2x] + [x].$$