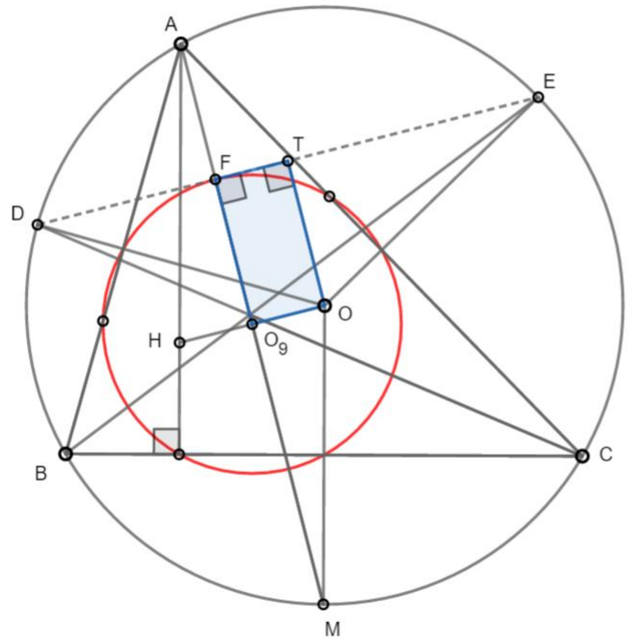
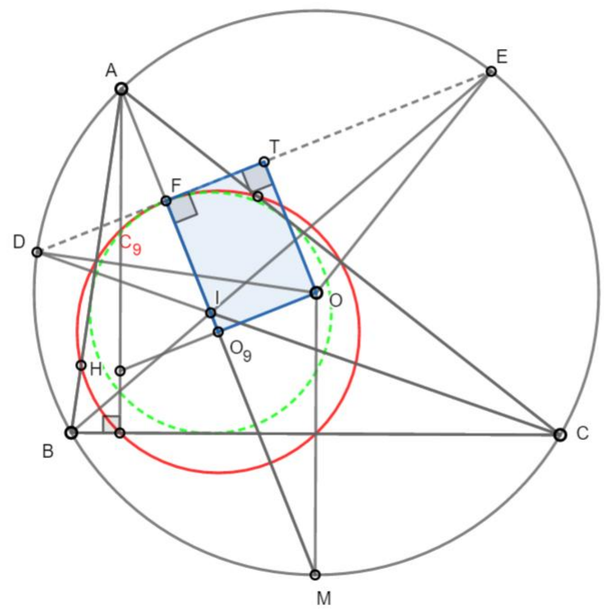
Problema 3. Se consideră triunghiul ABC cu m ($\angle$BAC) = 60^0, și AB diferită de AC. Notăm cu D și E punctele de intersecție a bisectoarelor unghiurilor $\angle$ABC și $\angle$ACB cu cercul circumscris triunghiului ΔABC. Demonstrați că dreapta DE este tangentă cercului celor nouă puncte (Euler-Feuerbach) asociat triunghiului ΔABC.



Soluție. Fie H, O și O_9, ortocentrul, centrul cercului circumscris, respective centrul cercului celor 9 puncte asociat triunghiului ΔABC. Se știe că semidreptele (AH, și (AO, sunt izogonale (simetrice față de bisectoarea unghiului $\angle$BAC), că AH = 2R · cosA = R = AO și că O_9 este mijlocul segmentului (OH). Cum ΔAHO este triunghi isoscel, (AO_9, este bisectoarea unghiului $\angle$BAC și înălțime în triunghiul ΔAHO, adică $AO_9 \perp O_9O$. Ducem OT $\perp$ DE, T $\in$ DE și notăm cu F intersecția dreptelor DE cu AO_9. Dacă M este al doilea punct de intersecție al bisectoarei din A cu cercul circumscris, este ușor de văzut că m($\angle$AFD) = (m($\widehat{AD}$) + m($\widehat{ME}$)) / 2 = m($\angle$ABD) + m($\angle$BCM) + m($\angle$ECB) = m($\angle$C) / 2 + m($\angle$A) / 2 + m($\angle$B) / 2 = 180^0 / 2 = 90^0. Deci $FO_9 \perp$ DE, de unde patrulaterul $FTOO_9$ este dreptunghi. Dar unghiul la centru în cercul circumscris triunghiului ABC, $\angle$ DOE are măsura de 120^0, întrucât este suma măsurilor arcelor $\widehat{AD}$ respectiv $\widehat{AE}$, adică m ($\angle$B) + m ($\angle$C) = 180^0 – m ($\angle$A) = 180^0 - 60^0 = 120^0. Avem așadar că m ($\angle$TEO) = 30^0 (unghi la baza triunghiului isoscel ΔODE, cu baza DE). Prin urmare FO_9 = OT = OD sin 30^0 = R/2 = cu raza cercului Euler, de unde rezultă imediat că F este și pe cercul celor nouă puncte asociat triunghiului ABC. Cu această observație am demonstrat că intersecția bisectoarei unghiului A al triunghiului ΔABC cu DE aparține cercului celor nouă puncte și DE este perpendiculară pe raza O_9F a acestui cerc, deci are loc concluzia problemei.



Comentariu metodic. Se poate formula cu ușurință o reciprocă acestei proprietăți. Dreapta DE este tangentă la cercul celor nouă puncte atunci măsura unghiului $\angle A$ este de 60^0. O proprietate similară are loc dacă vom considera bisectoarele exterioare triunghiului ΔABC cu vârfurile în B și C. Anume, dreapta determinată de intersecțiile bisectoarelor exterioare triunghiului ΔABC duse prin B și C, cu cercul circumscris triunghiului, este și ea tangentă cercului celor nouă puncte dacă și numai dacă măsura unghiului A este de 60^0. Punctul de tangență notat cu F, este de fapt punctul lui Feuerbach asociat triunghiului ΔABC. *Teorema cu același nume afirmă că în orice triunghi cercul înscris acestuia și cercul celor 9 puncte asociat, sunt tangente într-un punct numit punctul lui Feuerbach.* Mai observăm că dreptele DE și BC sunt simetrice față de perpendiculara în punctul I pe bisectoarea unghiului A.