Partea întreagă, partea fracţionară a unui număr real

ABSTRACT: Materialul conţine câteva proprietăţi şi rezultate legate de partea întreagă şi cea fracţionară a unui număr real, precum şi unele probleme reprezentative.

● Lecţia se adresează clasei a VII a.

● Autor: Lucian Dragomir, Liceul Bănăţean Oţelu Roşu

I. Definiţii, notaţii, proprietăţi.

● Dacă un număr real a are scrierea zecimală $a = a_0, a_1a_2a_3...$

(evident $a_0 \in \mathbb{Z}$ şi $a_1, a_2, a_3, ... \in \{0,1,2,...,9\}$), atunci partea întreagă a lui a se notează cu $[a]$ şi se defineşte prin $[a] = \begin{cases} a_0 & , \text{ dacă } a \geq 0 \\ a_0 - 1 & , \text{ dacă } a < 0 \end{cases}$.

● Mai simplu de reţinut: partea întreagă a lui a este cel mai mare număr întreg care nu îl depăşeşte pe a (este aşadar cel mult egal cu a); dacă facem apel la reprezentarea pe axă a numerelor reale, atunci $[a]$ este primul număr întreg din stânga lui a.

● În baza axiomei lui Arhimede, se poate spune şi: pentru orice număr real a, există un unic număr întreg, notat cu $[a]$, astfel încât $[a] \leq a < [a]+1$; aşadar, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem: $[a] = k \in \mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $k \leq a < k+1$.

● Prin definiţie, partea fracţionară a numărului real a este $\{a\} = a - [a]$; evident $\{a\} \in [0,1)$.

● Vom trece în revistă câteva proprietăţi şi rezultate utile, des folosite în rezolvarea problemelor, fără să uităm a spune că acestea vor uşura trecerea peste unele *obstacole* apărute, de exemplu, în aritmetică, în analiza matematică, în chestiuni de numărare şi combinatorică.

P 1. $a - 1 < [a] \leq a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

P 2. $a < k \Leftrightarrow [a] < k, \forall a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

P 3. $[k + \alpha] = k, \forall k \in \mathbb{Z}, \alpha \in [0,1)$.

P 4. $[a + k] = [a] + k, \forall a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

P 5. $\{a + k\} = \{a\}, \forall a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

P 6. $[[a]]=[a],\{\{a\}\}=\{a\},[\{a\}]=\{[a]\}=0,\forall a\in\mathbb{R}.$

P 7. Dacă $a,b\in\mathbb{R}$ şi $[a]=[b]$, atunci $|a-b|<1.$

(Reciproca este falsă; e suficient un contraexemplu: $a=\frac{1}{3},b=-\frac{1}{3}$)

P 8. $\{a\}=\{b\}\Leftrightarrow(a-b)\in\mathbb{Z},\forall a,b\in\mathbb{R}.$

P 9. $[a]+[b]\le[a+b]\le[a]+[b]+1,\forall a,b\in\mathbb{R}.$

P 10. $[-x]+[x]=-1,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$**.**

P 11. $[a]+\left[a+\frac{1}{2}\right]=[2a],\forall a\in\mathbb{R}.$ (identitatea lui Hermite; de remarcat că aceasta admite o generalizare destul de des utilizată: $[a]+\left[a+\frac{1}{n}\right]+\left[a+\frac{2}{n}\right]+...+\left[a+\frac{n-1}{n}\right]=[na],\forall a\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}^*.$)

P 12. Exponentul numărului prim *p* din descompunerea în factori primi ai numărului $n!$ este

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+....$$

II. Probleme instructive.

1. Să se arate că $[na]=[nb],\forall n\in\mathbb{N}$ **dacă şi numai dacă** $a=b.$

(Gheorghe Andrei, OJ Constanţa, 1996)

Soluţie: Dacă $a=b$ prima egalitate este evidentă. Presupunând că $a\ne b$ şi $[na]=[nb],\forall n\in\mathbb{N}$, obţinem $na-\{na\}=nb-\{nb\}\Rightarrow n(a-b)=\{na\}-\{nb\}\in(-1,1)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Dacă $a>b$, membrul stâng al ultimei egalităţi poate fi oricât de mare, contradicţie. Analog dacă $a<b$, aşadar $a=b.$ □

2. Dacă $a,b\in\mathbb{R}$**, să se arate că** $\{a\}+\{b\}=1$ **dacă şi numai dacă** $(a+b)\in\mathbb{Z}$ **şi** $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$

(Gheorghe Andrei)

Soluţie: Dacă $a,b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ şi $(a+b)\in\mathbb{Z}$,atunci $\{a\}+\{b\}\in[0,2)$; cum $\{a\}+\{b\}=a-[a]+b-[b]\in\mathbb{Z}$,deducem că $\{a\}+\{b\}\in\{0,1\}$. Deoarece $\{a\}+\{b\}\ne0$ (în caz contrar am ajunge la $a,b\in\mathbb{Z}$, contradicţie), obţinem $\{a\}+\{b\}=1$.Reciproc, dacă $\{a\}+\{b\}=1$, avem $\{a\}\ne0,\{b\}\ne0$ şi,din $1=\{a\}+\{b\}=a-[a]+b-[b]$, deducem $(a+b)\in\mathbb{Z}$.□

3. Să se rezolve ecuaţia $\left[\frac{4x-1}{3}\right]=\frac{3x+1}{4}.$

Soluţie: Trebuie să remarcăm pentru început (şi asta se cam uită) că indiferent de ce expresie

aparent stufoasă este $E(x)$, cu $x \in \mathbb{R}$, avem că $[E(x)]$ este întreg, aşadar $\frac{3x+1}{4} \overset{not.}{=} k \in \mathbb{Z}$;

deducem că $x = \frac{4k-1}{3}$ (1) . Pe de altă parte, [illegible] $\frac{x+1}{4}+1$, se ajunge imediat la $x \in \left[1, \frac{19}{7}\right)$. Folosind acum (1), deducem $1 \le \frac{4k-1}{3} < \frac{19}{7}$, de unde $1 \le k < \frac{16}{7}$; cum însă $k \in \mathbb{Z}$, obţinem $k \in \{1,2\}$ şi, corespunzător, $x \in \left\{1, \frac{7}{3}\right\}$. □

4. Să se determine numerele reale pozitive *x* şi *y* pentru care $\begin{cases} x+2[y]=1,5 \\ y+2[x]=2,5 \end{cases}$.

Soluţie: Adunăm ecuaţiile sistemului dat şi ajungem la $3[x]+3[y]+\{x\}+\{y\}=4$; deoarece $x, y \ge 0, x, y \notin \mathbb{Z}$ şi $\{x\}+\{y\} \in [0,2)$, deducem că $\{x\}+\{y\}=1$ şi astfel avem şi $[x]+[y]=1$. Cazul $[x]=0, [y]=1$ este exclus datorită primei ecuaţii, aşadar rămâne doar $[x]=1, [y]=0$, de unde obţinem imediat $x=1,5$ şi $y=0,5$.

Observaţie: Relaţiile şi condiţiile din enunţ sunt atât de generoase încât permit obţinerea şi mai rapidă a soluţiilor (se pot determina separat părţile fracţionare, respectiv întregi ale necunoscutelor). Cum $[x],[y] \in \mathbb{N}$, prima ecuaţie conduce la $\{x\}=0,5$, apoi la $[x]+2[y]=1$; similar, a doua ecuaţie conduce la $\{y\}=0,5$ şi $[y]+2[x]=2$; se obţine astfel $[x]=1, [y]=0$ şi concluzia este imediată. □

5. a) Să se arate că nu există numere reale *x* pentru care $\left[\frac{x}{2}\right] = x^2+1$.

b) Să se determine numerele reale *y* pentru care $\left[\frac{y}{2}\right] = y^2$.

(Lucian Dragomir, OL Caraş Severin, 2009)

Soluţie: a) Dacă $x<0$, membrul stâng este negativ, iar cel drept strict pozitiv; evident, $x=0$ nu verifică, iar dacă $x \in (0,2)$, membrul stâng este 0, pe când cel drept este supraunitar; în general acum, dacă $x \in [2k, 2k+2), k \in \mathbb{N}^*$, avem $\left[\frac{x}{2}\right] = k$ şi $x^2+1 \ge 4k^2 > k, \forall k \in \mathbb{N}^*$, aşadar ecuaţia nu are soluţii reale; b) se observă soluţia $y=0$ şi, printr-un raţionament asemănător cu cel anterior, se arată că nu mai există alte numere reale *y* care să satisfacă egalitatea din enunţ. □

6. Să se rezolve ecuaţia $[-2x]+[-x]+[x]+[2x]+1=0$.

(Andrei Eckstein, OL Timiş, 2009)

Soluţie: Este naturală folosirea proprietăţii **P 10.** (cu evidenta observaţie că $[-x]+[x]=0, \ \forall x \in \mathbb{Z}$). Avem astfel că, dacă $x \in \mathbb{Z}$, ecuaţia conduce la $0+0+1=0$, evident fals, deci ecuaţia nu are soluţii întregi. Dacă $x \notin \mathbb{Z}$ şi $2x \notin \mathbb{Z}$, se ajunge la egalitatea $-1+(-1)+1=0$ (falsă şi aceasta). Dacă $2x \in \mathbb{Z}$,

dar $x \notin \mathbb{Z}$, atunci $[-2x]+[-x]+[x]+[2x]+1=0+(-1)+1=0$, aşadar orice $x \notin \mathbb{Z}$ pentru care $2x \in \mathbb{Z}$ este soluţie a ecuaţiei, mulţimea soluţiilor acesteia fiind $S=\left\{\frac{2n+1}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

7. Să se găsească perechile ordonate (x,y) de numere pozitive şi distincte pentru care

$$x+y=1{,}5 \text{ şi } [x-y]+[y-x]=0.$$

(Lucian Dragomir)

Soluţie: A doua egalitate din enunţ se poate scrie $x-y-\{x-y\}+y-x-\{y-x\}=0$, de unde $\{x-y\}=\{y-x\}=0$. Folosind **P.8.** avem că $(x-y-y+x)=2(x-y)\in\mathbb{Z}$, deci $x-y=\frac{k}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Deoarece avem şi $x+y=1{,}5$, deducem imediat că $x=\frac{k+3}{4}, y=\frac{3-k}{4}$. Cum însă $x,y\geq 0$,ajungem la $k\in\{0,1,2,3\}$. Analizăm uşor aceste cazuri şi obţinem perechile cerute: $\left(1,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{4},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{3}{2},0\right)$. □

8. Să se rezolve ecuaţia $\left[x^{2003}\right]+\left[x^{2002}\right]+\ldots+\left[x^{2}\right]+[x]=\{x\}-1.$

(Concurs Ucraina,2003)

Soluţie: Membrul stâng al ecuaţiei este număr întreg, deci , dacă *x* este o soluţie a ecuaţiei, avem $\{x\}\in\mathbb{Z}$; cum însă $\{x\}\in[0,1)$, ajungem la $\{x\}=0\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$; ecuaţia devine astfel $x^{2003}+x^{2002}+\ldots+x^2+x+1=0$ sau $(x+1)\left(x^{2002}+x^{2000}+\ldots+x^2+1\right)=0$. Deoarece suma din a doua paranteză este strict pozitivă, se obţine unica soluţie a ecuaţiei $x=-1$. □

9. a) Să se arate că $n[x]\leq[nx], \forall x\in\mathbb{R}_+, n\in\mathbb{N}.$

b) Să se determine toate numerele reale pozitive *x* pentru care

$$[x],2[x],[2x] \text{ sunt numere naturale consecutive.}$$

(Mircea Fianu,OL Bucureşti,2002)

Soluţie: a) $[nx]=\left[n[x]+n\{x\}\right]=n[x]+\left[n\{x\}\right]\geq n[x].$

b) Pentru $x>0$ avem aşadar $[x]<2[x]<[2x]$; deoarece $2[x]-[x]=1$, deducem că $[x]=1$, apoi $[2x]=3$ şi astfel ajungem la $\{x\}\in\left[\frac{1}{2},1\right)$, de unde $x\in\left[\frac{3}{2},2\right)$. Verificăm acum că toate aceste numere satisfac condiţia din enunţ.□

10. Să se arate că prin împărţirea lui $k \in \mathbb{Z}$ la $n \in \mathbb{N}^*$ se obţine câtul $\left[\frac{k}{n}\right]$ şi restul $n \cdot \left\{\frac{k}{n}\right\}$.

Soluţie: Notăm câtul şi restul cu *q* , respectiv *r* şi avem: $k = nq + r$, $cu\ 0 \le r < n$. Deducem acum:

$q \le \frac{nq+r}{n} = \frac{k}{n} < \frac{nq+n}{n} = q+1$, aşadar $\left[\frac{k}{n}\right] = q$. Pe de altă parte,

$n \cdot \left\{\frac{k}{n}\right\} = n\left(\frac{k}{n} - \left[\frac{k}{n}\right]\right) = n\left(\frac{nq+r}{n} - q\right) = r.$

Observaţie: Această problemă pune în evidenţă faptul că, dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci în mulţimea $\{1,2,3,...,k\}$ avem exact $\left[\frac{k}{n}\right]$ multipli de *n* .□

11. Să se determine câte numere naturale nenule, mai mici decât 100, nu sunt divizibile nici cu 2, nici cu 3.

Soluţie: Ne referim aşadar la mulţimea $\{1,2,3,...,99\}$ în care avem $\left[\frac{99}{2}\right] = 49$ de numere divizibile cu 2 şi $\left[\frac{99}{3}\right] = 33$ de numere divizibile cu 3. Am fi poate tentaţi să dăm rezultatul $99-(49+33)$, însă trebuie să remarcăm că unele numere au fost numărate de două ori (de exemplu 6, 12 , 18 , ...) – numărul acestora este egal cu $\left[\frac{99}{2\cdot 3}\right] = 16$. Abia acum putem da rezultatul corect: avem $99-(49+33-16) = 33$ de numere cu proprietatea din enunţ.

Observaţie: Să remarcăm aici că soluţia foloseşte de fapt un binecunoscut principiu de numărare, anume **Principiul includerii şi excluderii.** Este vorba despre următorul rezultat:

(1) Dacă *A* şi *B* sunt două mulţimi finite, atunci $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

(principiul includerii şi excluderii pentru două mulţimi)

(2) Dacă *A, B, C* sunt trei mulţimi finite, atunci

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

(principiul includerii şi excluderii pentru trei mulţimi). □

12. Să se determine care este exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi ai numărului $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 100.$

Soluţie: În mulţimea $\{1,2,3,...,100\}$ avem $\left[\frac{100}{2}\right] = 50$ de numere divizibile cu 2; dintre aceste 50 de numere, fiecare al doilea este divizibil cel puţin cu puterea a doua a lui 2 – sunt $\left[\frac{100}{2^2}\right] = 25$ de astfel de numere; dintre acestea, fiecare al doilea este divizibil cel puţin cu 2^3. Raţionăm la fel în

continuare, ţinem cont că $2^7 > 100$ şi că fiecare factor al lui $100!$ care este divizibil cu 2^k, dar nu şi cu 2^{k+1}, $(k \in \{1,2,3,4,5,6,\})$, se socoteşte, în modul indicat, de *k* ori ca fiind divizibil cu $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^k$. Exponentul căutat este astfel

$$\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{100}{2^6}\right]=50+25+12+6+3+1=97.$$

Observaţie: Evident, puteam folosi direct proprietatea **P 12,** ţinând cont doar de faptul că $\left[\frac{100}{2^k}\right]=0, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 7$; am preferat însă aici să vedem efectiv cum se ajunge la aceasta.

13. Să se rezolve ecuaţia $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{4}\right]=x.$

(Olimpiadă Canada)

Soluţie: Remarcăm din nou că, dacă $x \in \mathbb{R}$ este o soluţie a ecuaţiei, atunci $x \in \mathbb{Z}$ (membrul drept este o sumă de numere întregi); pentru a ne uşura căutările, *privim* ecuaţia modulo k, unde *k* este c.m.m.m.c al numerelor de la numitori, adică în cazul de faţă $k=12$. Pentru $x=12q+r$, cu $q \in \mathbb{Z}, r \in \{0,1,2,\ldots 11\}$, folosind din nou **P.**4, ecuaţia conduce la :

$$6q+\left[\frac{r}{2}\right]+4q+\left[\frac{r}{3}\right]+3q+\left[\frac{r}{4}\right]=12q+r \text{ sau } q+\left[\frac{r}{2}\right]+\left[\frac{r}{3}\right]+\left[\frac{r}{4}\right]=r.$$

Calcule imediate conduc la rezultatele căutate, care pot fi sintetizate (de exemplu), într-un tabel de forma:

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
q	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
x	0	13	14	15	4	17	6	19	8	9	10	23

Observaţie: Folosind **P 1.** avem $\frac{x}{2}-1<\left[\frac{x}{2}\right] \leq \frac{x}{2}$ şi analoagele, de unde, prin adunarea celor trei relaţii, se ajunge la $\frac{13x}{12}-3<x \leq \frac{13x}{12} \Rightarrow 0 \leq x < 36,\ x \in \mathbb{Z}$. Căutările se limitează astfel destul de mult.

14. Să se rezolve ecuaţia $\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left[\frac{x+2}{3}\right]+\left[\frac{x+3}{4}\right]=3x.$

(Aurel Doboşan)

Soluţie: Deoarece membrul stâng este o sumă de numere întregi, avem că $3x=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{k}{3}$ şi astfel ecuaţia conduce la $\left[\frac{k+3}{6}\right]+\left[\frac{k+6}{9}\right]+\left[\frac{k+9}{12}\right]=k.$ Folosind **P.4.** ajungem acum la: $\left[\frac{k-3}{6}\right]+1+\left[\frac{k-3}{9}\right]+1+\left[\frac{k-3}{12}\right]+1=k$; notăm $k-3=m\in\mathbb{Z}$ şi astfel: $\left[\frac{m}{6}\right]+\left[\frac{m}{9}\right]+\left[\frac{m}{12}\right]=m$. (*) .

Deoarece $\frac{m}{6}-1<\left[\frac{m}{6}\right]\le\frac{m}{6}$, $\frac{m}{9}-1<\left[\frac{m}{9}\right]\le\frac{m}{9}$, $\frac{m}{12}-1<\left[\frac{m}{12}\right]\le\frac{m}{12}$, ajungem la:

$\frac{13m}{36}-3<m\le\frac{13m}{36}$ şi,imediat, $m\in\{-4,-3,-2,-1,0\}$. Egalitatea (*) este însă verificată doar pentru $m\in\{-3,0\}$ şi astfel se ajunge la $x\in\{0,1\}$ (Verificare!).□

15. Să se arate că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ **este adevărată egalitatea:**

$$\left[\frac{x+3}{6}\right]-\left[\frac{x+4}{6}\right]+\left[\frac{x+5}{6}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]-\left[\frac{x+1}{3}\right].$$

(Cristinel Mortici,OJ, 2002)

Soluţie: Notăm $\frac{x+1}{6}=y$ şi egalitatea propusă devine $\left[y+\frac{1}{3}\right]-\left[y+\frac{1}{2}\right]+\left[y+\frac{2}{3}\right]=[3y]-[2y]$;

aceasta se obţine imediat din identităţile de tip **P.11.**: $[2y]=[y]+\left[y+\frac{1}{2}\right]$ şi

$[3y]=[y]+\left[y+\frac{1}{3}\right]+\left[y+\frac{2}{3}\right]$. □

16. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ **pentru care** $x=\frac{\{x\}}{[x]}$.

(Titu Andreescu,OL Sibiu,2003)

Soluţie: Evident, $x\notin[0,1)$ (dacă $x\in[0,1)$ am avea numitorul nul, absurd). Deosebim următoarele cazuri:

(i) $x\in[1,\infty)$. Avem în acest caz $\frac{\{x\}}{[x]}\ge 1$ şi $[x]\ge 1$,de unde $[x]\le\{x\}<1$,absurd;

(ii) $x\in(-\infty,-1)$,adică $\frac{\{x\}}{[x]}<-1$; deoarece $[x]\le -2$,avem $-[x]<\{x\}<1\Rightarrow[x]>-1$,contradicţie;

(iii) $x\in[-1,0)\Rightarrow[x]=-1$; în acest caz ecuaţia devine $x=-\{x\}$ sau $[x]+\{x\}=-1+\{x\}=-\{x\}$,de unde $\{x\}=\frac{1}{2}$. Am obţinut astfel unica soluţie a ecuaţiei iniţiale,anume $x=-\frac{1}{2}$. □

17. Să se determine cel mai mare număr natural *x* pentru care $2000!$ este divizibil cu 23^{6+x}.

(Juriu OBMJ,2000)

Soluţie: Numărul 23 este prim şi divide fiecare al 23-lea număr natural,aşadar există $\left[\frac{2000}{23}\right]=86$ numere care sunt mai mici sau egale cu 2000 şi sunt divizibile cu 23.Analog, doar trei numere mai mici sau egale cu 2000 sunt divizibile cu 23^2 ,deci 23^{89} divide 2000!;rezultă că cel mai mare număr natural căutat este $x=89-6=83$. □

18. Determinaţi numerele naturale n care verifică următoarele proprietăţi:

a) $\left[\frac{n}{12}\right]$ este un număr natural de trei cifre, ultimele două fiind egale cu 0.

b) $\left[\frac{n+36}{3}\right]$ este un număr natural de patru cifre, acestea fiind 2,0,1,2 (nu neapărat în această ordine)

(Lucian Dragomir, Concurs RMCS, 2012)

Soluţie : $\left[\frac{n}{12}\right]=\overline{a00}\Rightarrow 1200\cdot a\le n<1200\cdot a+12$ (1). Notăm cu *A* mulţimea numerelor de patru cifre formate cu cifrele 2, 0, 1, 2 ; cel mai mic element al acestei mulţimi este 1022, iar cel mai mare 2210;

din $\left[\frac{n+36}{3}\right]\overset{not.}{=}k\in A$ deducem că $1022\le\frac{n+36}{3}$ şi $\frac{n+36}{3}<2211$, de unde

$3030\le n<6597$. Din (1) rezultă astfel că $a\in\{3,4,5\}$. Pentru $a=3$ se obţine $k\notin A$, la fel pentru $a=4$. Pentru $a=5$ se ajunge la $n\in\{6000,6001,6002\}$, numere care verifică ambele condiţii din enunţ.

19. Să se arate că dacă *m* şi *n* sunt numere naturale prime între ele, atunci

$$\left[\frac{m}{n}\right]+\left[\frac{2m}{n}\right]+\ldots+\left[\frac{(n-1)m}{n}\right]=\frac{1}{2}(m-1)(n-1).$$

(Gauss)

Soluţie: Considerăm în plan punctele $A(n,0),B(n,m),C(0,m)$. În interiorul dreptunghiului *OABC* se

află $(m-1)(n-1)$ puncte de coordonate întregi;deoarece $(m,n)=1$,pe diagonala *OB* nu se află astfel de puncte, iar sub diagonală se află $\frac{(m-1)(n-1)}{2}$ puncte de forma (k,h), $cu\ k,h\in\mathbb{N}^*$.Pentru *k* fixat, există $\left[\frac{km}{n}\right]$ puncte şi astfel, în total, sub diagonala *OB* sunt $\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{km}{n}\right]$ puncte. Identificând cele două rezultate ajungem la $\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{km}{n}\right]=\frac{1}{2}(m-1)(n-1)$.□

20. Se consideră numerele naturale *m* şi *n* , $n\geq 1$. **Să se determine numerele reale *x* pentru care**

$$[x+1]+\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\ldots+\left[x+\frac{1}{n}\right]=m.$$

(Mircea Becheanu,ON,1988)

Soluţie: Presupunem că prin împărţirea lui *m* la *n* se obţine câtul *q* şi restul *r*. Pentru ca egalitatea din enunţ să fie adevărată, deoarece părţile întregi din membrul stâng pot diferi prin cel mult o unitate, trebuie ca cei mai mici termeni din membrul stâng să fie egali cu *q*, iar *r* dintre ei să fie egali cu $q+1$.

Dacă $r=0$, atunci $\left[x+\frac{1}{n}\right]=\left[x+\frac{2}{n}\right]=\ldots=[x+1]=q$ conduce la

$q\leq x+\frac{1}{n}<x+\frac{1}{n-1}<\ldots<x+1<q+1$, de unde $x\in\left[q-\frac{1}{n},q\right)$.

Dacă $r\neq 0$, trebuie să avem $\left[x+\frac{1}{n}\right]=\left[x+\frac{1}{n-1}\right]=\ldots=\left[x+\frac{1}{r+1}\right]=q$ şi

$\left[x+\frac{1}{r}\right]+\left[x+\frac{1}{r-1}\right]+\ldots+[x+1]=q+1$, de unde

$q\leq x+\frac{1}{n}<\ldots<x+\frac{1}{r+1}<q+1\leq x+\frac{1}{r}<\ldots<x+1<q+2\Rightarrow x\in\left[q+1-\frac{1}{r},q+1-\frac{1}{r+1}\right)$. □

III. Probleme propuse.

(1) Rezolvaţi ecuaţia $[x]+4\cdot\{x\}=2005$.

Vasile Chiriac, Bacău

(2) Rezolvaţi ecuaţia $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{6}\right]=x$.

(3) Arătaţi că $[x]+[nx]=[(n+1)x],\ \forall x\in\mathbb{N}$ dacă şi numai dacă $x\in\mathbb{Z}$.

(4) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\{x\}-\{2x\}=x$.

Costel Chiteş, OL Bucureşti, 2000

(5) Se consideră un număr real r pentru care

$$\left[r+\frac{19}{100}\right]+\left[r+\frac{20}{100}\right]+\left[r+\frac{21}{100}\right]+\ldots+\left[r+\frac{91}{100}\right]=546.$$

Determinaţi $[100r]$.

Concurs AIME (SUA), 1991

Bibliografie:

[1] Gheorghe Andrei, Ion Cucurezeanu, Constantin Caragea – Probleme de algebră, Funcţiile parte întreagă şi parte fracţionară, Editura Gil, 1996

[2] Mihai Onucu Drimbe – 200 de identităţi şi inegalităţi cu „ partea întreagă”, Editura Gil, 2004

[3] (colectiv) Matematică (olimpiade şi concursuri şcolare) – Editura Paralela 45, 2009, 2010, 2011

Periodice:

[4] Gazeta Matematică (G.M) , colecţia 2000 – 2012

[5] Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din Caraş – Severin (RMCS), colecţia 2008 – 2012