Problema 4. O bucată de caşcaval de formă cubică are o coajă pe fiecare din cele 6 feţe ale sale. Ea este tăiată prin 33 de tăieturi, fiecare din ele paralelă cu câte una din feţele cubului, în mai multe bucăţi în formă de paralelipiped dreptunghic. Ştiind că exact jumătate din bucăţile de caşcaval formate conţin coajă, aflaţi numărul total de bucăţi.

Concursul Náboj, 2016

A se vedea problema 53.

Soluţie:

Fie a, b, c numărul de tăieturi paralele cu feţele de sus şi jos, stânga şi dreapta, respectiv faţă şi spate ale cubului.

Se formează $(a+1)(b+1)(c+1)$ bucăţi de caşcaval. Pentru ca să existe bucăţi fără coajă trebuie ca $a, b, c > 1$. Numărul de bucăţi fără coajă este atunci $(a-1)(b-1)(c-1)$. Aşadar, condiţia din enunţ revine la $a+b+c = 33$, $(a+1)(b+1)(c+1) = 2(a-1)(b-1)(c-1)$.

Ultima relaţie se scrie $abc - 3(ab + bc + ca) + a + b + c - 3 = 0$, adică $abc - 3(ab + bc + ca) + 30 = 0$, sau $abc - 3(ab + bc + ca) + 9(a + b + c) - 27 = 240$, ceea ce revine la $(a-3)(b-3)(c-3) = 240$. Cazurile cu $a < 3$ (sau $b < 3$ sau $c < 3$) nu convin. Într-adevăr, $a = 2$ ar obliga $b = 2$, $c = 240$ (sau invers), ceea ce ar contrazice $a + b + c = 33$. Aşadar $(a-3)(b-3)(c-3) = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$, $(a-3) + (b-3) + (c-3) = 24$.

• Dacă numerele $a-3$, $b-3$, $c-3$ sunt toate trei pare, notând $a-3 = 2x$, $b-3 = 2y$, $c-3 = 2z$, trebuie să avem $xyz = 30$, $x+y+z = 12$. Exact unul dintre numerele x, y, z este divizibil cu 5. Dacă acesta ar fi 10, celelalte ar trebui să fie 1 şi produsul ar fi 10, nu 30. Aşadar unul din numere trebuie să fie 5, iar celelalte două să aibă produsul 6 şi suma 7, deci celelalte sunt 1 şi 6. Aşadar $\{x, y, z\} = \{1, 5, 6\}$, adică $\{a, b, c\} = \{5, 13, 15\}$, prin urmare numărul total de bucăţi de caşcaval este $(a+1)(b+1)(c+1) = 6 \cdot 14 \cdot 16 = 1344$.

• Dacă exact unul dintre numerele $a-3$, $b-3$, $c-3$ este par, atunci el trebuie să fie divizibil cu 16. Suma numerelor fiind 24, rezultă că numărul par este exact 16, iar celelalte două numere au produsul 15 şi suma 8, deci sunt 3 şi 5. Aşadar $\{a-3, b-3, c-3\} = \{3, 5, 16\}$, adică $\{a, b, c\} = \{6, 8, 19\}$, prin urmare numărul total de bucăţi de caşcaval este $(a+1)(b+1)(c+1) = 7 \cdot 9 \cdot 20 = 1260$.

În concluzie, problema are două soluţii: 1260 şi 1344.