

# COMENTARIILE OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2014 ETAPA JUDEȚEANĂ ȘI A MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

ABSTRACT. Comments on some of the problems presented at the 2014 District Round of the Romanian National Mathematics Olympiad.

Se adresează claselor IX, X, XI, XII.

Data: 10 martie 2014.

Autor: Dan Schwarz-Moromete, București.

*Capul lui Moțoc vrem ...*

## 1. INTRODUCERE

Aceste comentarii asupra Etapei Județene și a Municipiului București a Olimpiadei de Matematică 2014 reflectă opinia personală a autorului.<sup>1</sup> Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.<sup>2</sup>

Voi indica prin culoarea **roșie** eventualele erori, sau notațiile abuzive din enunțurile originale, și prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsea din enunț sau soluție). Voi folosi în mod predilect și culoarea **albastră** pentru comentariile de natură personală.

## 2. UN ARTICOL DEFĂIMĂTOR

Următoarea ”știre” (din 24 februarie 2014) apare la link-ul următor [http://www.romaniatv.net/stirea-ta-scandal-la-olimpiada-de-matematica-olimpici-internationali-depunctati-pentru-ca-stiu-prea-mult\\_128708.html](http://www.romaniatv.net/stirea-ta-scandal-la-olimpiada-de-matematica-olimpici-internationali-depunctati-pentru-ca-stiu-prea-mult_128708.html)

(Spre deosebire de comentariile mele, care se sprijină pe fapte materiale și o situație de existență, articolul este o exagerare fără suport și noimă ...)

**ȘTIREA TA. SCANDAL la Olimpiada de matematică.  
Olimpici internaționali, depunctați pentru că știu PREA MULT.**

**Un scandal fără precedent** a izbucnit la Olimpiada de Matematică din Capitală. După faza pe sector, elevi cu rezultate excelente, care au ajuns în trecut la olimpiade internaționale, au fost eliminați doar pentru că au rezolvat problemele altfel decât prevedea baremul de corectare, **fără ca în enunțuri să fi fost specificată o anumită metodă de rezolvare.**

<sup>1</sup>La sugestia unui *literato* prieten al meu, care vede acest spațiu ca fiind ”poiana lui Iocan” a matematicii școlare românești.

<sup>2</sup>Lipsește unele probleme, la care nu am văzut interesul de a fi prezentate. Le găsiți pe toate (postate în timp record – bravo!), ca și rezultatele, la <http://ssmr.ro/bareme>.

Un cititor **RomaniaTV.net** ne-a scris că scandalul este în floare la Colegiul "Tudor Vianu" din Capitală, după faza pe sector a Olimpiadei de Matematică, desfășurată duminică **23 februarie 2014**. **Sute de părinți și copii** așteaptă să depună contestații la secretariat pentru că nu au fost punctați, deși au obținut rezultate corecte, prin metode diferite de rezolvare a problemelor. "Deșteptii care se ocupă cu Olimpiada, au dat niște probleme grele, așa cum este normal, dar au băgat la corectat niște **profesorași de cartier**, care habar n-au să interpreteze o teză. S-a ajuns la hilara situație în care, copii de internațională să nu treacă de faza pe sector (...) pentru că au rezolvat problemele în altă manieră decât cea din baremul de corectare. **Rezolvări geniale, care meritau a fi punctate cu 10**, au fost evaluate cu ZERO (...). Elevii, dacă au fost corecțați de "**femeia de serviciu**", au fost depunctați în masă, fiindcă n-au scris "ca la barem". De unde să știe biata "**femeie de serviciu**" care a corectat lucrările unor olimpici abia veniți cu aur și argint de-afară, că aceeași problemă se rezolvă și geometric, și trigonometric și vectorial... și toate rezolvările sunt valabile", ne-a scris \*\*\* pe **Facebook**.

"Un scandal fără precedent" este o exagerare în negativ – din păcate au existat, după mine, scandaluri mult mai mari legate de Olimpiada de Matematică (Națională sau Internațională), care n-au fost tratate de loc așa cum se cuvine. "Fără ca în enunțuri să fi fost specificată o anumită metodă de rezolvare" este o afirmație goală – niciodată nu este/n-ar trebui să fie specificată o metodă anume de rezolvare în enunțul problemei; nu suntem la bucătărie, unde gătim după o rețetă dată. Faptul că o soluție corectă trebuie să primească scor maxim, indiferent de metoda evidențiată în baremul oficial, este axiomatic. "Sute de ..." este evident o hiperbolă; n-avem noi nici măcar zeci de valori recunoscute. "Profesorași de cartier" nu ar trebui să fie cuvânt de ocară – marea masă a sistemului educațional dintr-o țară este constituită din **soldați fără nume**, profesori anonimi în afara locului unde își desfășoară activitatea, și care duc greul procesului de învățământ. Este la fel de adevărat însă că cei **chemați** la această activitate excepțională care este Olimpiada ar trebui în primul rând să își exercite un dram de auto-cenzură și să decidă singuri dacă sunt într-adevăr pregătiți pentru cerințele acestei activități, și doar apoi să se cufunde în ea, cu întreaga responsabilitate și dedicație presupuse. "Rezolvări geniale ... punctate cu 10" nu pot exista, printre altele pentru că punctajul maxim este de doar 7 puncte pe problemă, și mai apoi pentru că **genial** este un cuvânt care trebuie utilizat cu mare circumspecție. Iar cu "**femeia de serviciu**" există anecdote care anihilează și această linie de atac! cine știe oare unde și-a făcut ea studiile?!? Preda Mihăilescu a lucrat (în exil) ca hamal, paznic de noapte, și la dat zăpada ... înainte de a demonstra conjectura lui Catalan.

Fac așadar un susținut apel la forurile organizatoare (Inspectorate Școlare, Ministerul Educației, Comisia Națională a Olimpiadei, SSMR) să reașeze Olimpiada de Matematică pe o bază de completă **transparență** și de spirit profesionalism.

- Numele selecționarilor problemelor date în concurs să fie (la fel de) cunoscute, ca și cele ale autorilor problemelor. Calitatea subiectelor date în examen ține chiar în mai mare măsură de **alegerea** justă, și de **verificarea** problemelor alese, din punctul de vedere al corectitudinii (atât matematice cât și lingvistice a) enunțului și soluției, și al gradului de dificultate dorit. Desigur, *cognoscenti* sunt în mare măsură la curent cu această informație, dar ea trebuie făcută **publică**, așa cum componența unui juriu de concurs, a unui complet de judecată, sau a unei echipe medicale de intervenție, este cunoscută. Sunt convins că acest fapt va duce în paralel și la o mai mare **responsabilizare** a membrilor acestor (și celor următoare) comisii.

- Numele celor direct implicați în corectarea subiectelor și, mai apoi, în rezolvarea contestațiilor, să fie **afișate** – pe clasa și problema în cauză, și aceasta la toate etapele Olimpiadei, de la Locală la Finală. Aceasta nu este o lucrare de taină, ci un element de domeniu public. Liste complete cu notele după corectare, și notele finale după contestații, să fie imediat disponibile. O statistică a diferențelor evidențiate, urmată de o analiză pertinentă, să fie făcute și publicate. Acum un an sau doi am produs chiar eu o astfel de analiză, dar acest an sunt lipsit de datele necesare. Știu, prin *telefonul arab*, că au existat **discrepanțe** uriașe, mergând până la 11 puncte (din 28), și că numărul celor calificați mai departe (îndeplinind baremul de 14/28 puncte) aproape că uneori s-a dublat. Așa că, în anume măsură, *casus belli* al articolului citat mai sus este explicabil.

- În fine, o reacție și o poziție față de critici (ca articolul citat mai sus) trebuie să fie **asumate**. Societatea civilă are dreptul și datoria să cenzureze, iar acțiunile ei nu trebuie ignorate sau acoperite cu o mantie de întuneric, ci răspunsuri trebuie oferite, și, după caz, măsuri de reparare trebuie promise și implementate. *Dixit. Vox clamantis ...*

Această **transparență** dorită, în contrast cu amenințările, vai, goale,<sup>3</sup> ale unora, nemulțumiți de comentariile mele, care afirmă că ”altă dată vom fi mai atenți în a distribui subiectele selectate”. Nu; nu – mai atenți în selecționarea problemelor și redactarea soluțiilor – ci la cine va ajunge să le vadă! (de parcă nu sunt disponibile la sute de ochi).

---

Luarea de poziție de mai sus fiind făcută, să ne concentrăm în continuare pe scopul principal al acestui material.

---

<sup>3</sup>*Empty threats are the last sanctuary of the terminally inept* – Neil Gaiman.  
Niccolò Machiavelli spunea (despre Cesare Borgia) – *At one time he never said what he was going to do; now he says things which he is incapable of doing.*

## 3. CLASA A IX-A

**Subiectul (1).** Să se determine **numărul** irațional  $x$  știind că numerele  $x^2 + x$  și  $x^3 + 2x^2$  sunt numere întregi.

*Soluție.* Putem imediat scrie  $x((x^2 + x) - 1) = (x^3 + 2x^2) - (x^2 + x)$ , de unde rezultă că  $1 = x^2 + x = x^3 + 2x^2$  ( $x$  fiind irațional). Prin urmare

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , și **ambele** verifică. După mine, cerința de determinare a numărului irațional  $x$  este prost formulată; mai potrivită era cererea de determinare a numerelor iraționale  $x \dots$  vezi de exemplu enunțul problemei următoare, unde **funcțiile** cerute se dovedesc a fi **una** singură (dar acest lucru este în ordine, în jargonul obișnuit).

La același preț, putem investiga și cazul  $x$  rațional. Fie  $x = p/q$ , cu  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$ ,  $\text{cmmdc}(p, q) = 1$ . Condiția  $x^2 + x \in \mathbb{Z}$  se scrie  $q^2 \mid p(p+q)$ , care implică  $q \mid p+q$ , deci  $q \mid p$ , de unde  $q = \pm 1$  și deci  $x \in \mathbb{Z}$ , când evident pentru orice  $x$  întreg expresiile respective iau valori întregi.  $\square$

**Subiectul (3).** Medianele  $AD$ ,  $BE$  și  $CF$  ale triunghiului  $ABC$  se intersectează în punctul  $G$ . Fie  $P$  un punct în interiorul triunghiului, **nesituat pe niciuna dintre medianele acestuia**. Dreapta care trece prin  $P$  și este paralelă cu  $AD$  intersectează latura  $BC$  în punctul  $A_1$ . În mod analog se definesc punctele  $B_1$  și  $C_1$ . Să se arate că

$$\overline{A_1D} + \overline{B_1E} + \overline{C_1F} = \frac{3}{2}\overline{PG}.$$

*Soluție.* Soluția mă interesează prea puțin, cu atât mai mult cu cât sunt asigurat că, prin metoda coordonatelor baricentrice, rezultatul este obținut **oricare** ar fi punctul  $P$  în planul triunghiului  $ABC$ , ceea ce *de facto* pune capăt întrebării – normale – dacă interiorul  $\triangle ABC$  cuprinde și laturile sale sau nu (interior *topologic*). Dar notația  $\overline{XY}$ , când era intenționat  $\overrightarrow{XY}$ , este cel puțin ciudată în contextul convențiilor din școala românească. Deoarece " $\vec{\phantom{x}}$ " dă în L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X oribilitatea  $\overrightarrow{XY}$ , opțiunea era între " $\overrightarrow{\phantom{x}}$ " și " $\overline{\phantom{x}}\strut$ ", și clar alegerea greșită (a doua) a fost făcută.<sup>4</sup>  $\square$

**Subiectul (4).** Să se determine funcțiile  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  care au proprietățile:

- $f(m+n) - 1$  divide  $f(m) + f(n)$ , pentru orice  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ;
- $n^2 - f(n)$  este pătrat perfect, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

*Soluție.* Din  $1^2 - f(1)$  pătrat perfect, și  $f(1) \in \mathbb{N}^*$ , rezultă  $f(1) = 1$ . Din  $f(n+1) - 1 \mid f(n) + f(1) = f(n) + 1$  rezultă  $f(n+1) \leq f(n) + 2$ , iar din  $(n+1)^2 - f(n+1)$  pătrat perfect, și  $f(n+1) \in \mathbb{N}^*$ , rezultă  $f(n+1) \geq 2n+1$ .

<sup>4</sup>Vezi materialul atașat "Problema 3-IX.pdf" al lui Ștefan Tudose; pentru notații vezi <http://mathworld.wolfram.com/Vector.html> sau [http://en.wikipedia.org/wiki/Vector\\_notation](http://en.wikipedia.org/wiki/Vector_notation) (unde se menționează și  $\overline{\phantom{x}}$ , dar ca opțiune secundară).

Cu ipoteza de inducție  $f(k) = 2k - 1$  pentru  $1 \leq k \leq n$ , avem  $f(n) = 2n - 1$  și deci

$$2n + 1 = f(n) + 2 \geq f(n + 1) \geq 2n + 1,$$

de unde  $f(n+1) = 2n+1 = 2(n+1)-1$ . Prin urmare  $f(n) = 2n - 1$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Această funcție **verifică** ambele condiții, căci  $f(m+n) - 1 = 2(m+n) - 1 - 1 = (2m-1) + (2n-1) = f(m) + f(n)$  (chiar cu egalitate), și  $n^2 - f(n) = n^2 - (2n-1) = (n-1)^2$ .

De remarcat că această verificare lipsește din soluția oficială, iar baremul nu penalizează lipsa ei. Sunt curios ...  $\square$

#### 4. CLASA A X-A

**Subiectul (1).** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația

$$|z - |z + 1|| = |z + |z - 1||.$$

*Soluție.* Ecuația dată ne spune că punctul de afix  $z$  se află pe mediatoarea segmentului determinat de punctele de afixe  $|z + 1|$  și  $-|z - 1|$ . Notând  $z = x + iy$ , avem deci

$$x = \frac{\sqrt{(1+x)^2 + y^2} - \sqrt{(1-x)^2 + y^2}}{2} = \frac{2x}{\sqrt{(1+x)^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2}}.$$

O primă posibilitate este  $x = 0$ , cu  $y \in \mathbb{R}$  arbitrar; pentru  $x \neq 0$  avem însă  $2 = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \geq |1+x| + |1-x| \geq |(1+x) + (1-x)| = 2$ , dar egalitate se întâmplă dacă și numai dacă  $y = 0$  și  $x \in [-1, 1]$ .

Această soluție este ceva mai directă și la obiect decât mai laborioasa soluție oficială (desigur, ambele exploatănd același fenomen).  $\square$

**Subiectul (2).** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația

$$x + \log_2 \left( 1 + \sqrt{\frac{5^x}{3^x + 4^x}} \right) = 4 + \log_{1/2} \left( 1 + \sqrt{\frac{25^x}{7^x + 24^x}} \right).$$

*Soluție.* Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  dată prin  $f(x) = \frac{5^x}{3^x + 4^x} = \frac{1}{(3/5)^x + (4/5)^x}$  este evident crescătoare; în mod similar funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  dată prin  $g(x) = \frac{25^x}{7^x + 24^x} = \frac{1}{(7/25)^x + (24/25)^x}$  este crescătoare. Prin compuneri de funcții crescătoare și/sau descrescătoare, membrul stâng este crescător, iar cel drept este descrescător, deci ecuația are cel mult o soluție reală.

Cum numerele au fost *grijuliu* alese astfel încât  $f(2) = g(2) = 1$ , reiese că  $x = 2$  este (singura) soluție. Se poate de altfel arăta că ecuația are întotdeauna soluție (unică), chiar pentru numere mai puțin cumsecade, de exemplu cu  $\pi$  în loc de 3! singurul lucru care contează este ca funcțiile  $f$  și  $g$  să fie crescătoare, cu valori ne-negative.

Nu prea înțeleg rațiunea acrobațiilor din soluția oficială, cu atât mai mult cu cât această metodă de mai sus face parte din meniul curent al ”trucurilor” de rezolvare a astor feluri de ecuații în clasa a X-a.  $\square$

**Subiectul (3).** Fie numerele naturale nenule  $p$  și  $n$ , unde  $p \geq 2$ , și fie numărul real  $a$  astfel încât  $1 \leq a < a + n \leq p$ . Să se arate că mulțimea

$$\{\lfloor \log_2 x \rfloor + \lfloor \log_3 x \rfloor + \cdots + \lfloor \log_p x \rfloor \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq a + n\}$$

are exact  $n + 1$  elemente.

*S-a notat prin  $\lfloor x \rfloor$  partea întreagă a numărului real  $x$ .*

*Soluție.* O primă simplă observație este că pentru  $k$  natural,  $k \geq 2$ , dacă avem  $\log_k x = m \in \mathbb{N}$ , atunci  $x = k^m \in \mathbb{N}$ . Prin urmare  $\lfloor \log_k x \rfloor = \lfloor \log_k \lfloor x \rfloor \rfloor$  pentru orice  $x \geq 1$ . Atunci funcția  $f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  dată prin

$$f(x) = \lfloor \log_2 x \rfloor + \lfloor \log_3 x \rfloor + \cdots + \lfloor \log_p x \rfloor$$

are proprietatea  $f(x) = f(\lfloor x \rfloor)$ . Mai mult,  $f$  este evident crescătoare, și  $f(k) \geq \lfloor \log_k k \rfloor + f(k-1) = 1 + f(k-1)$ . Aceasta înseamnă că, în condițiile problemei,

$$f([a, a+n]) = \{f(\lfloor a \rfloor), f(\lfloor a \rfloor + 1), \dots, f(\lfloor a \rfloor + n)\},$$

și mulțimea de care se face vorbire are exact  $n + 1$  elemente.

Din nou, un enunț supra-încărcat dă iluzia unei probleme dificile, când de fapt singurul fapt semnificativ este aproape trivial. Condiția  $p \geq 2$  nu pare necesară, căci rezultă din datele problemei, având  $n, a \geq 1$  și  $p \geq a + n$ ; într-un anume fel este de fapt insuficientă – ar fi trebuit dat  $p \geq n + 1$ . Iar jocul pe care îl face  $a$  crează o complicație cu totul artificială.  $\square$

**Subiectul (4).** Să se determine funcțiile  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  cu proprietatea că  $f(x + 3f(y)) = f(x) + f(y) + 2y$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{Q}$ .

*Soluție.* Prin manipulări tipice, o astfel de funcție  $f$  este dovedită a satisface ecuația Cauchy  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , deci are forma  $f(x) = ax$  (fiind definită doar peste raționale). Înlocuind în ecuația inițială, se ajunge la  $3a^2 = a + 2$ , deci la singurele valori admisibile  $a \in \{1, -2/3\}$ .  $\square$

## 5. CLASA A XI-A

**Subiectul (1).** (a) Dați un exemplu de două matrice  $A$  și  $B$  din  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , astfel încât

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Arătați că, dacă  $A$  și  $B$  sunt două matrice din  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , astfel încât  $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ , atunci *ele nu comută*,  $AB \neq BA$ .

*Soluție.* a) Vezi soluția oficială.

b) Se folosește rezultatul de folclor că pentru matrice reale  $A, B$  care comută avem  $\det(A^2 + B^2) \geq 0$  (ușor de demonstrat, factorizând  $A^2 + B^2 = (A + iB)(\overline{A + iB})$ ), în timp ce  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 < 0$ .  $\square$

**Subiectul (2).** (a) Arătați că, dacă  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție, astfel încât funcțiile  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) + f(2x)$ , și  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = f(x) + f(4x)$ , sunt continue pe  $\mathbb{R}$ , atunci și  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ .

(b) Dați un exemplu de funcție discontinuă  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , care are următoarea proprietate: există un interval **nedegenerat**  $I \subset \mathbb{R}$ , astfel încât, oricare ar fi  $a \in I$ , funcția  $g_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_a(x) = f(x) + f(ax)$ , este continuă pe  $\mathbb{R}$ .

*Soluție.* a) Din  $g(2x) = f(2x) + f(4x)$  obținem  $h(x) - g(2x) = f(x) - f(2x)$ , și atunci  $f(x) = \frac{1}{2}(g(x) + (h(x) - g(2x)))$ , deci  $f$  este continuă.

b) După cum cel puțin unul dintre participanți a remarcat, dacă nu se specifică faptul că intervalul  $I$  este **nedegenerat**, un exemplu este extrem de ușor de găsit; fie  $I = [-1, -1]$  și  $f$  orice funcție impară discontinuă. După ce chestionarea intervalului  $I$  a fost supusă comisiei, și după o prelungită considerare, s-a adus precizarea că intervalul  $I$  trebuie totuși considerat a fi nedegenerat, ceea ce face întrebarea ne-trivială. Punctul a) ajută, în a lua în considerație că nu putem avea  $[2, 4] \subseteq I$ .

Un exemplu poate fi găsit, împingând la extrem ideea de funcție impară; putem lua funcția *signum*  $f(x) = \text{sign}(x)$  dată prin  $f(0) = 0$  și  $f(x) = x/|x|$  pentru  $x \neq 0$ , și intervalul  $I = (-\infty, 0)$ , pentru care  $g_a$  este identic nulă pentru orice  $a \in I$ .

În afară de cinci scoruri mari, rezultate proaste, din cauza probabil a faptului că punctul b) este o problemă de construcție, întotdeauna mai pretențioasă (vezi și comentariile referitoare la construcția din Problema 4 care urmează).  $\square$

**Subiectul (4).** Fie  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$  o funcție strict crescătoare. Arătați că:

(a) Există un șir descrescător de numere reale, strict pozitive,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , convergent la 0, astfel încât  $y_n \leq 2y_{f(n)}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ ;

(b) Dacă  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un șir descrescător de numere reale, convergent la 0, atunci există un șir descrescător de numere reale,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , convergent la 0, astfel încât  $x_n \leq y_n \leq 2y_{f(n)}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .

*Soluție.* Desigur, punctul b) este suficient, căci luând  $x_n = \frac{1}{n+1}$  pentru  $n \in \mathbb{N}$ , obținem fără alt efort suplimentar punctul a).

Din  $f(0) \geq 1$  și  $f$  strict crescătoare rezultă imediat prin simplă inducție că  $f(n) \geq n+1$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ; nu că am avea neapărat nevoie de acest fapt, dar ca să spulbere incertitudinea relativă la ordinea dintre valorile  $n$  și  $f(n)$ , prin asigurarea inegalității  $n < f(n)$ .

Ideea este de a construi un șir strict crescător  $(k_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , cu  $k_0 = 0$ , astfel încât  $y_n$  să ia valoare constantă  $y_{k_m}$  pentru  $k_m \leq n \leq k_{m+1} - 1$ . Anume, vom lua  $y_0 > x_0$ , și  $y_{k_m} = (2/3)^m y_0$  pentru  $m \geq 1$ . Dacă șirul  $(k_m)_{m \in \mathbb{N}}$  va avea proprietatea că  $x_{k_m} < (2/3)^m y_0$  și  $f(k_m) < k_{m+1}$  pentru orice  $m \in \mathbb{N}$ , atunci

- șirul  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este descrescător (evident), și cu limita 0, căci subșirul  $(y_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$  are limita 0;

- $y_n = y_{k_m} = (2/3)^m y_0 > x_{k_m} \geq x_n$  pentru orice  $m \in \mathbb{N}$  și pentru  $k_m \leq n \leq k_{m+1} - 1$ , deci  $x_n < y_n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ;

- $f(n) < f(k_{m+1}) \leq k_{m+2} - 1$  pentru orice  $m \in \mathbb{N}$  și  $k_m \leq n \leq k_{m+1} - 1$ , cu  $y_n = y_{k_m} = (2/3)^m y_0 < 2(2/3)^{m+1} y_0 = 2y_{k_{m+2}-1} \leq 2y_{f(k_{m+1})} \leq 2y_{f(n)}$  pentru orice  $m \in \mathbb{N}$  și pentru  $k_m \leq n \leq k_{m+1} - 1$ , deci  $y_n < 2y_{f(n)}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

Într-adevăr, putem construi un astfel de șir  $(k_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , cu  $k_0 = 0$ . Dacă presupunem construit  $k_m$ , din faptul că limita șirului  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este 0 va exista un indice  $N_m > k_m$  astfel ca  $x_n < (2/3)^{m+1} y_0$  pentru orice  $n \geq N_m$ . Este suficient atunci a lua  $k_{m+1} = \max\{N_m, f(k_m) + 1\}$ . **Cu puțin mai multă grijă putem chiar obține un șir  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  strict descrescător (la 0).**

O problemă ciudată prin cerința aparent complicată; grea (doar trei-patru scoruri mari) prin simplul fapt că este o problemă de construcție, deci de creație. Este bine să-i obișnuim pe copii cu astfel de îndeletniciri.  $\square$

## 6. CLASA A XII-A

**Subiectul (1).** Pentru  $n \in \mathbb{N}^*$  considerăm funcția  $f_n: [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$  dată de  $f_n(x) = \arctan[x]$ , unde  $[x]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $x$ .

Să se arate că  $f_n$  este integrabilă și să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n f_n(x) dx$ .

*Soluție.* Funcția  $f_n$  este constantă pe intervalele  $[k, k+1)$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ , deci este integrabilă. Atunci

$$\int_0^n f_n(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f_n(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f_n(k) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \arctan k,$$

și deci din Cesàro-Stolz avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \arctan k = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan n = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ .

Funcția  $\arctan[x]$  fiind crescătoare, există și un raționament echivalent mai direct. Pe de o parte avem

$$\frac{1}{n} \int_0^n \arctan[x] dx \leq \frac{1}{n} \int_0^n \arctan n dx = \arctan n,$$

cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$ , iar pe de altă parte, pentru orice  $0 < m < n$  întregi

$$\frac{1}{n} \int_0^n \arctan[x] dx \geq \frac{1}{n} \int_m^n \arctan m dx = \frac{n-m}{n} \arctan m.$$



Atunci  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-m}{n} \arctan m \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \arctan m = \frac{\pi}{2}$ .  $\square$

Soluția oficială conține câteva stângăcii, ca scrierea  $[i, i+1] \setminus \{i+1\}$  în loc de  $[i, i+1)$ , și regretabila eroare de tipar  $\int_0^n f_n(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_i^{i+1} f_n(i) dx$ .

**Subiectul (3).** Fie  $(A, +, \cdot)$  un inel cu proprietatea: *că oricare ar fi  $x \in A$ , avem  $x + x^2 + x^3 = x^4 + x^5 + x^6$ .*

a) Să se arate că dacă  $n \geq 2$  este un număr natural,  $x \in A$  și  $x^n = 0$ , atunci  $x = 0$ .

b) Să se arate că  $x^4 = x$ , oricare ar fi  $x \in A$ .

*Soluție.* a) Proprietatea dată se scrie  $x = x^2(x^4 + x^3 + x^2 - x - 1)$ , deci și  $x^{n-1} = x^n(x^4 + x^3 + x^2 - x - 1)$ , pentru orice  $n \geq 2$ . Rezultă prin simplă reducere, din faptul că pentru orice  $n \geq 2$ , dacă  $x^n = 0$  atunci  $x^{n-1} = 0$ , că în final obținem  $x = 0$ . (Acest rezultat spune că singurul element nilpotent din inelul  $A$  este  $x = 0$ .)

b) Proprietatea dată este scrisă acum  $x(x^3 - 1)(x^2 + x + 1) = 0$  (și nu  $(x^3 - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ , ca în soluția oficială). Avem atunci

$$(x^4 - x)^2 = x^2(x^3 - 1)^2 = x(x - 1)(x(x^3 - 1)(x^2 + x + 1)) = 0,$$

și deci din punctul precedent rezultă  $x^4 - x = 0$ .  $\square$

**Subiectul (4).** Fie  $(G, \cdot)$  un grup care nu are elemente de ordin 4, și un morfism de grupuri  $f: G \rightarrow G$  care are proprietatea  $f(x) \in \{x, x^{-1}\}$ , oricare ar fi  $x \in G$ . Să se arate că  $f(x) = x$  oricare ar fi  $x \in G$ , sau  $f(x) = x^{-1}$  oricare ar fi  $x \in G$ .

*Soluție.* Să presupunem prin absurd că există  $g, h \in G$  cu  $f(g) = g \neq g^{-1}$  și  $f(h) = h^{-1} \neq h$ . Atunci  $f(gh) = f(g)f(h) = gh^{-1} = (gh)^{-1}$  (nu se poate  $gh^{-1} = gh$ , căci duce la  $h^2 = e$ ). Rezultă  $gh = hg^{-1}$ , deci și  $ghg = h$ .

Avem și  $f(gh^2) = f(g)f(h)^2 = gh^{-2} = (gh^2)^{-1}$  (nu se poate  $gh^{-2} = gh^2$ , căci duce la  $h^4 = e$ ). Rezultă  $gh^2 = h^2g^{-1}$ , deci și  $gh^2g = h^2$ .

Dar atunci  $gh^2g = h^2 = (ghg)^2 = ghg^2hg$ , de unde  $g^2 = e$ , contradicție.

Să observăm că  $f(x) = x^{-1}$  (oricare ar fi  $x \in G$ ) nu poate fi un morfism de grupuri decât dacă  $G$  este abelian, căci atunci

$$y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1} = f(xy) = f(x)f(y) = x^{-1}y^{-1},$$

și deci  $xy = yx$  pentru orice  $x, y \in G$ .  $\square$

În mod ciudat, de data aceasta materialele clasei a XII-a au fost cele care au conținut mai multe greșeli sau omisiuni. O scădere de nivel, compensată printr-o relativă ridicare a nivelului la majoritatea celorlalte clase.

## 7. ÎNCHEIERE

Nu-mi rămân prea multe de spus în concluzie. O singură orhidee exotică (problema 4, clasa a XI-a); în rest multe plante de câmp, banalități sau idei cunoscute și re-folosite, și o senzație generală de *déjà vu*.