SOLUȚIE

Problema 1.

Se consideră $n \geq 3$ un număr natural impar și $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{n-1}$ rădăcinile de ordin n ale unității, diferite de 1. Demonstrați că:

$$\frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \cdot \frac{1+\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2} \cdot ... \cdot \frac{1+\varepsilon_{n-1}}{1-\varepsilon_{n-1}} = \frac{1}{n}.$$

***

Soluție:

Din relația $z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1)$ rezultă că numerele ε_k, $k = \overline{1, n-1}$ sunt rădăcinile ecuației $z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1 = 0$.

Avem egalitatea $z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1 = (z - \varepsilon_1)(z - \varepsilon_2) \cdot ... \cdot (z - \varepsilon_{n-1})$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Pentru $z = 1$ obținem relația

$$(1) \qquad n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \varepsilon_k),$$

iar pentru $z = -1$ obținem relația

$$(2) \qquad 1 = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (1 + \varepsilon_k) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 + \varepsilon_k).$$

Împărțind (1) și (2), rezultă cerința problemei.