Etapa 6, Problema 2

Fie un punct P pe latura BC a triunghiului neisoscel ABC, astfel încât $\triangle ABP$ şi $\triangle ACP$ au acelaşi perimetru. Fie M mijlocul laturii BC şi I centrul cercului înscris în $\triangle ABC$. Demonstraţi că $IM \parallel AP$.

Soluţie.
Din egalitatea perimetrelor deducem că $AB+BP=AC+CP$ şi atunci $BP=p-b$, $AC=p-c$. Din teorema bisectoarei, avem că $BD=\dfrac{ac}{b+c}$ şi $CD=\dfrac{ab}{b+c}$. Dar $DM=BM-$ $-BD=\dfrac{a(b-c)}{2(b+c)}$, iar $MP=MC-CP=\dfrac{b-c}{2}$, prin urmare

$$\frac{MD}{MP}=\frac{a}{b+c} \qquad (1).$$

Aplicând teorema bisectoarei în $\triangle ADB$, obţinem că $\dfrac{ID}{IA}=\dfrac{DB}{AB}$, aşadar

$$\frac{ID}{IA}=\frac{a}{b+c} \qquad (2).$$

Din (1) şi (2) rezultă că $\dfrac{MD}{MP}=\dfrac{ID}{IA}$, care conduce la $IM \parallel AP$ conform reciprocei teoremei lui Thales.