Problema 3. Fie $(BD$ bisectoarea unghiului B al triunghiului ABC, $D \in AC$. Cercul circumscris triunghiului BCD intersectează a doua oară dreapta AB în punctul E, iar cercul circumscris triunghiului ABD intersectează a doua oară dreapta BC în punctul F. Arătaţi că $AE = CF$.

Olimpiadă Sankt Petersburg, 1996

Soluţie:
Din puterea punctului A faţă de cercul circumscris triunghiului BCD avem

$$(1) \qquad AB \cdot AE = AD \cdot AC.$$

Din puterea punctului C faţă de cercul circumscris triunghiului BAD avem

$$(2) \qquad CB \cdot CF = CD \cdot AC.$$

Din teorema bisectoarei, avem

$$(3) \qquad \frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD}.$$

Împărţind relaţia (1) cu relaţia (2) şi ţinând seama de relaţia (3) obţinem imediat că $AE = CF$.