Problema 3

Se consideră cubul *ABCDA'B'C'D'* de latură 1. Determinaţi minimul expresiei

$d^2(M,(ABD))+d^2(M,(AA'B))+d^2(M,(AA'D))+d^2(M,(BDA'))$, atunci când punctul *M* este în interiorul piramidei *ABDA'*, unde $d(M,\alpha)$ este distanţa de la punctul *M* la planul α .

***

Soluţie

$d^2(M,(ABD))+d^2(M,(AA'B))+d^2(M,(AA'D))+d^2(M,(BDA'))=AM^2+d^2(M,(A'BD))$.

Considerăm un plan α care trece prin *M* şi este paralel cu planul $(A'BD)$. Orice punct de pe planul α are distanţa până la planul $(A'BD)$ egală cu $d(M,(A'BD))$. Dacă $M'=pr_{\alpha}A$ şi $T=pr_{(A'BD)}A$ atunci

$d(M,(A'BD))=d(M',(A'BD))$ şi $AM^2+d^2(M,(A'BD))=AM^2+TM'^2$. AM e minima dacă $M=M'$, deci $AM^2+d^2(M,(A'BD))$ este minimă atunci cănd punctele *A*, *M'* şi *T* sunt coliniare şi $M=M'$. Pe de altă parte, AM^2+MT^2 este minimă dacă *M* este mijlocul lui *AT* deci,

$d^2(M,(ABD))+d^2(M,(AA'B))+d^2(M,(AA'D))+d^2(M,(BDA'))$, este minimă când *M* este mijlocul perpendicularei din *A* pe planul $(A'BD)$, si cum $d(A,(A'BD))=\frac{1}{3}AC'$ obţinem că minimul cerut este egal cu

$2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{1}{6}$.