Problema 1. Arătaţi că dacă $a, b, c \in \left(\frac{1}{6}, \infty\right)$, atunci

$$\frac{a^2+b^2}{6b-1}+\frac{b^2+2c^2}{6c-1}+\frac{c^2+3a^2}{6a-1} \geq 1.$$

Andrei Eckstein

Soluţia 1:

Avem că $\frac{x^2}{6x-1} \geq \frac{1}{9}$, pentru orice $x > \frac{1}{6}$.

Într-adevăr, relaţia se scrie echivalent $9x^2 \geq 6x-1$, adică $(3x-1)^2 \geq 0$, care este evidentă. Egalitate avem pentru $x = \frac{1}{3}$.

Folosind acest rezultat pentru a, b, c, putem scrie:

$$\frac{a^2+b^2}{6b-1}+\frac{b^2+2c^2}{6c-1}+\frac{c^2+3a^2}{6a-1} = \left(\frac{a^2}{6b-1}+\frac{b^2}{6c-1}+\frac{c^2}{6a-1}\right)+$$

$$\left(\frac{b^2}{6b-1}+2\cdot\frac{c^2}{6c-1}+3\cdot\frac{a^2}{6a-1}\right) \geq \left(\frac{a^2}{6b-1}+\frac{b^2}{6c-1}+\frac{c^2}{6a-1}\right)+\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{9}.$$

Astfel, rămâne să demonstrăm că $\frac{a^2}{6b-1}+\frac{b^2}{6c-1}+\frac{c^2}{6a-1} \geq \frac{1}{3}$.

Ori din inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz (vezi ,,Inegalitatea 1" din materialul teoretic), rezultă

$$\frac{a^2}{6b-1}+\frac{b^2}{6c-1}+\frac{c^2}{6a-1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{6(a+b+c)-3} \geq \frac{1}{3}.$$

Notând cu $s = a+b+c$, ultima inegalitate este echivalentă cu $s^2 \geq 2s-1$, adică cu $(s-1)^2 \geq 0$.

Avem egalitate în inegalitatea de mai sus dacă şi numai dacă $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Soluţia 2:

Putem scrie $\frac{a^2+b^2}{6b-1}+\frac{b^2+2c^2}{6c-1}+\frac{c^2+3a^2}{6a-1} = \frac{a^2}{6b-1}+\frac{b^2}{6b-1}+\frac{b^2}{6c-1}+\frac{c^2}{6c-1}+$

$\frac{c^2}{6c-1}+\frac{c^2}{6a-1}+\frac{a^2}{6a-1}+\frac{a^2}{6a-1}+\frac{a^2}{6a-1}$.

Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz (vezi ,,Inegalitatea 1" din materialul teoretic) pentru aceşti 9 termeni, rezultă $\frac{a^2+b^2}{6b-1}+\frac{b^2+2c^2}{6c-1}+\frac{c^2+3a^2}{6a-1} \geq$

$$\frac{(a+2b+3c+3a)^2}{2(6b-1)+3(6c-1)+4(6a-1)} = \frac{(4a+2b+3c)^2}{6(4a+2b+3c)-9} \geq 1.$$

La ultima inegalitate s-a folosit pentru numărul $x = 4a+2b+3c$ faptul că $\frac{x^2}{6x-9} \geq 1$ pentru orice $x > \frac{3}{2}$, adică $(x-3)^2 \geq 0$ pentru orice $x > \frac{3}{2}$.