3. Fie $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_{2013}}$, 2013 vectori nenuli de modul cel mult 1. Să se demonstreze că putem găsi o alegere convenabilă de semne astfel încât $\pm\overrightarrow{OA_1} \pm \overrightarrow{OA_2} \pm \ldots \pm \overrightarrow{OA_{2013}}$ să aibă modulul mai mic sau egal cu $\sqrt{2}$.

Generalizare:
Considerăm $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots \vec{v_n}$ n vectori nenuli cu $|\vec{v_i}| \le 1$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$
dem că putem alege semnele + și − a.î. $|\pm\vec{v_1} \pm \vec{v_2} \pm \ldots \pm \vec{v_n}| \le \sqrt{2}$

Putem considera câtoți vectorii au aceeași origine sau îi putem translata în origine

fie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 3 vectori cu $|\vec{a}| \le 1$; $|\vec{b}| \le 1$; $|\vec{c}| \le 1$; vectorii au ac. origine
și considerăm vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, -\vec{a}, -\vec{b}, -\vec{c}$
cum avem 6 vectori în jurul unui punct; $360 = 6 \cdot 60^\circ \Rightarrow$ cf. Principiului Cuticei vor exista 2 vectori care au unghiul dintre ei $\le 60^\circ$
fie acestia $\vec{x}$ și $\vec{y}$

$\overset{T.cos.}{\Rightarrow} |\vec{x} - \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2\cos\varphi \cdot |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$ $\quad (\varphi \le 60^\circ)$

fie $m = |\vec{x}|$; $n = |\vec{y}|$ OBS cum $|\vec{a}| = |-\vec{a}| \le 1 \ldots$ $\quad a = m, n \le 1$

vom dem $|\vec{x} - \vec{y}|^2 = m^2 + n^2 - 2\cos\varphi \cdot m \cdot n \le 1$

Obs $\cos\varphi \ge \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\quad (0^\circ \le \varphi \le 60^\circ)$

$\Rightarrow m^2 + n^2 - 2\cos\varphi\, mn \le m^2 + n^2 - mn$

dar $\underline{\underline{m^2 + n^2 - mn \le 1}}$ $\left(m^3 + n^3 \le m + n \text{ pt că } \begin{cases} 0 < m; n \\ m; n \le 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{m^3 + n^3}{m+n} \le \frac{m+n}{m+n} \right)$

$\Rightarrow |\vec{x} - \vec{y}| \le 1 \Rightarrow \vec{x} - \vec{y} = \vec{z}$; $|\vec{z}| \le 1$

$\Rightarrow$ am găsit o alegere convenabilă a semnelor dintre doi vectori a.î. ei să formeze alt vector cu modulul mai mic sau egal cu 1.
Acest vector poate fi translatat în origine și acum avem $n-1$ vectori de modul ≤ 1 și th. să ~~gasim~~ alegem +, − a.î. rel. să fie adevărată.
Analog putem repeta procedeul până când vom ajunge la doi vectori
fie acestia $\vec{u}$ și $\vec{v}$ $\Rightarrow$ th. să dem că există o alegere de semne a.î.
$|\pm\vec{u} \pm \vec{v}| \le \sqrt{2} \Rightarrow |\pm\vec{u} \pm \vec{v}|^2 \le 2 \Rightarrow (\pm\vec{u} \pm \vec{v})(\pm\vec{u} \pm \vec{v}) \le 2$
fie $\varepsilon = 1$, dacă semnul din fața lui $\vec{u}$ e „+" și -1 dacă e „−"; analog definim λ pt $\vec{v}$

$\Rightarrow (\varepsilon\vec{u} + \lambda\vec{v})^2 \le 2$

$\varepsilon^2 \cdot \vec{u}^2 + \lambda^2 \cdot \vec{v}^2 + 2\varepsilon\lambda\, \vec{u}\cdot\vec{v} \le 2$ dar $\varepsilon^2 = 1$

$\lambda^2 = 1$

$\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 \le 1$

$\vec{v}^2 = |\vec{v}|^2 \le 1$

$\Rightarrow$ tb să avem $2\varepsilon\lambda\, \vec{u}\cdot\vec{v} \le 0$

dar putem alege ε, λ; doar $\vec{u}, \vec{v}$ sunt fixe

$\Rightarrow$ dacă $\vec{u}\cdot\vec{v} \le 0 \Rightarrow \varepsilon = \lambda$ deci punem ac semn în fața lui $\vec{u}$ și $\vec{v}$

dacă $\vec{u}\cdot\vec{v} \ge 0 \Rightarrow \varepsilon = -\lambda$ deci punem semne dif în fața lui $\vec{u}$ și $\vec{v}$

$\Rightarrow$ avem o alegere convenabilă a semnelor

$\Rightarrow$ putem găsi o alegere convenabilă de semne a.î. $|\pm\vec{v_1} \pm \vec{v_2} \dots \pm \vec{v_n}| \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ pt $n = 2013$

putem găsi o alegere convenabilă a semnelor a.î. $|\pm\vec{OA_1} \pm \vec{OA_2} \pm \dots \pm \vec{OA_{2013}}| \le \sqrt{2}$

qed.