

Problema 4. În fiecare din cele opt vârfuri ale unui cub se scrie unul din numerele 1 sau -1 , apoi, pe fiecare din fețele cubului, se scrie produsul numerelor din cele patru vârfuri ale respectivei fețe. Este posibil ca suma celor 14 numere scrise în vârfurile și pe fețele cubului să fie:

- a) 7
- b) 0?

Olimpiadă Iugoslavia, 1987

Soluție:

Dacă schimbăm semnul unuia dintre numerele scrise în vârfurile cubului, numerele scrise pe cele patru fețe care conțin respectivul vârf își vor modifica și ele semnul. Cu alte cuvinte, patru din cele 14 numere își modifică valoarea cu $+2$ sau -2 . Astfel, suma celor 14 numere își schimbă valoarea cu un multiplu de 4 (mai precis, ea crește cu 8, crește cu 4, rămâne neschimbată, scade cu 4 sau scade cu 8). Dacă inițial scriem 1 în fiecare din vârfurile cubului, toate cele 14 numere vor fi egale cu 1, deci suma lor va fi 14, un număr care dă restul 2 la împărțirea cu 4. Atunci, oricum am modifica ulterior semnele numerelor scrise în vârfurile cubului, suma celor 14 numere va fi mereu un număr care dă restul 2 la împărțirea cu 4, prin urmare acesta nu poate fi nici 7, nici 0.

(Valoarea 7 se putea exclude foarte ușor observând că toate cele 14 numere sunt mereu impare, deci suma lor este mereu pară.)