Bareme clasa a X-a

Problema 1

Fie ABCD un patrulater înscris în cercul de centru O și rază R. Atunci $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 8R^2 \Leftrightarrow AC \perp BD$ sau una dintre diagonale este diametru în cercul dat.

Soluție:(Alex Băltărigă) Considerăm O – originea planului și a, b, c, d – afixele punctelor A, B, C, D.

Atunci $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 8R^2 \Leftrightarrow |a - b|^2 + |b - c|^2 + |c - d|^2 + |d - a|^2 = 8R^2$ $\Leftrightarrow$..........(2p)

$$\Leftrightarrow a\overline{b} + \overline{a}b + b\overline{c} + \overline{b}c + c\overline{d} + \overline{c}d + d\overline{a} + \overline{d}a = 0 \Leftrightarrow \text{..............(1p)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{d} + \frac{d}{c} + \frac{d}{a} + \frac{a}{d} = 0 \Leftrightarrow \text{........................(1p)}$$

$$\frac{a+c}{b} + \frac{a+c}{d} + \frac{b+d}{c} + \frac{b+d}{a} = 0 \Leftrightarrow \text{...(1p)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+c)(b+d)}{b \cdot d} + \frac{(a+c)(b+d)}{a \cdot c} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a + c)(b + d)(a \cdot c + b \cdot d) = 0 \Leftrightarrow \text{......................(1p)}$$

$$\Leftrightarrow a + c = 0 \text{ sau } b + d = 0 \text{ sau } a \cdot c + b \cdot d = 0 \Leftrightarrow \text{Concluzia.(1p)}$$

Merge şi trigonometric (relaţia se reduce la faptul că două dintre unghiurile la centru sub care se văd laturile sunt suplementare) iar calculele sunt mai puţine

Problema 2

Rezolvați în intervalul $(1; \infty)$ ecuația $2^{x^2-3x+3} = log_x(3x - 2)$. (GMB, 6-7-8/2020, Mihai Opincariu, Brad)

Soluție 1.(folosind injectivitatea unei funcții convenabil aleasă) (Traian Tămâian)

Ecuația se scrie echivalent cu: $2^{x^2} \cdot \lg x^2 = 2^{3x-2} \cdot \lg(3x - 2)$..(2p) Acum considerăm funcția $f: (1; \infty) \to R, f(t) = 2^t lgt$, pentru orice t număr real supraunitar. Funcția este produs de funcții strict crescătoare pe intervalul $(1; \infty)$, așadar este o funcție strict crescătoare, prin urmare va fi funcție injectivă pe intervalul $(1; \infty)$...(2p)

Ultima egalitate se poate scrie $f(x^2) = f(3x-2)$, cu $x^2>1$, respectiv $3x-2 > 1$, pentru orice $x \in (1; \infty)$. Din injectivitatea funcției f urmează că are loc $x^2 = 3x-2$..(2p) ecuație cu soluția convenabilă $x_1 = 2 \in (1; \infty)$, soluția $x_2 = 1 \notin (1; \infty)$.

Deci unica soluție este x = 2...(1p)

Soluție 2. (folosind o constantă separatoare) (Petru Braica)

Se verifică imediat că x = 2 $\in$ (1; ∞) e soluție pentru ecuația dată.

$2^{4-6+3} = 2 = log_2(6-2) = log_2 4 = 2$. ....(2p)

Analizăm cazurile x $\in$ (1; 2) respectiv x $\in$ (2; ∞).

În primul caz x-1 > 0 cu x-2 < 0 conduc la (x-1)(x-2) < 0, sau x^2-3x+2<0, de unde $2^{x^2-3x+3} < 2^{0+1} = 2 = log_x x^2 < log_x(3x-2)$, din monotonia funcților exponențială de bază supraunitară, 2, respectiv logaritmică de bază x supraunitară.Deducem că în primul caz nu avem soluții..(2p)

Pentru cazul al doilea din x$\in$(2; ∞), avem că x-1>0, respectiv x-2>0, de unde expresia x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0, de unde $2^{x^2-3x+3} > 2^{0+1} = 2 = log_x x^2 > log_x(3x-2)$, tot din faptul că cele două funcții, exponentială de bază supraunitară, 2, respectiv logaritmică de bază supraunitară x, sunt strict crescătoare pe (1; ∞).Așadar nici în cazul al doilea nu avem soluție...(2p)

Ramâne că singura soluție este x = 2...(1p)

Problema 3.

Determinați numărul permutărilor {a_1,a_2,...,a_{2020}} ale mulțimii {1; 2;…;2020} pentru care există un singur indice i$\in${1; 2; … ;2019} pentru care are loc $a_{i+1} < a_i$.

Soluție. Să notăm cu x_k numărul căutat dacă înlocuim pe k cu 2020. Avem că x_2=1.Numărul permutărilor căutate pentru care a_{2020}=2020 este x_{2019}. (2p)Numărul permutărilor căutate pentru care a_i = 2020, pentru i $\in${1; 2; … ;2019}, i fixat, este C_{2019}^{i-1}, deoarece fiecare permutare este unic determinată de numerele a_1<a_2<...<a_{i-1}. (2p) Deci avem relația: x_{2020} = x_{2019} + $\sum_{i=1}^{2019} C_{2019}^{i}$, rezultă că : x_{2020} = x_{2019} + 2^{2019}-1, analog x_{2019} = x_{2018} + 2^{2018}-1,..., x_3= x_2+ 2^2-1.(2p) Însumând ultimele egalități obținem că x_{2020} = 2^{2020}-2021.(1p)

Altfel: numărăm direct. O permutare bună e de forma a_1, a_2, …, a_2020, cu a_1< a_2 <…< a_n, a_(n+1) < a_(n+2) < … < a_2020 şi a_n>a_(n+1). Numărul lor este egal cu cel al şirurilor a_1 < a_2< … <a_n care au cel puţin o ,,gaură la început" = 2^{2020} – 2021 (e bună orice submulţime ordonată crescător, în afară de cea vidă şi cele de forma {1,2,…,k}).